FUZZY ANALÝZA SLOŽITÝCH NEURČIÝCH SOUSTAV - II

FUZZY ANALYSIS OF COMPLEX VAGUE SYSTEMS - II

Miroslav Pokorný
Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., Ústav informatiky,
miroslav.pokorny@mvso.cz

Abstrakt:
Příspěvek uvádí fuzzy analýzu jako metodu řešení analytických (fundamentálních) funkcí - abstraktních modelů soustav, jejichž proměnné a/nebo parametry jako ostrá (obyčejná) čísla jsou znejistěny (fuzzifikovány) do tvaru fuzzy čísel. Instruktážní příspěvek uvádí přístup k vybudování fuzzy aritmetiky s využitím α-diskretizace fuzzy množin a procedury α-optimalizace. Je uveden numerický příklad.

Abstract:
The paper presents a fuzzy analysis as a method of analytical (fundamental) functions solution as an abstract models of systems whose variables and/or parameters as sharp (ordinary) numbers are insecure (fuzzification) in the form of fuzzy numbers. This tutorial contribution presents an access to build fuzzy arithmetic using approaches of fuzzy sets theory, procedures of α-discretization and α-optimization. The numeric example is presented.

Klíčová slova:
náhodný systém, neurčitý systém, fuzzy číslo, fuzzy aritmetika, fuzzy analýza, fuzzy-stochastická analýza, princip rozšíření, diskretizace fuzzy množiny, α-optimalizace

Keywords:
stochastic system, indeterminate system, fuzzy number, fuzzy arithmetic, fuzzy analysis, fuzzy - stochastic analysis, the extension principle, α-discretization, α-optimization

1 Úvod

Zadehův princip rozšíření, který je základem procedur fuzzy aritmetiky [1], je obtížně aplikovatelný v případech složitých fundamentálních funkcí, vyžaduje diskretizaci nosičů fuzzy množin vstupních proměnných a parametrů funkce a může vést k výpočtovým problémům použitých numerických metod. Pro fuzzy analýzu je proto výhodnější použít metodu tzv. α-optimalizace, využívající α-řezů fuzzy množin (ALOP). Protože α-řezy funkcí příslušnosti takových fuzzy množin fuzzy čísel jsou spojité intervaly, je totiž možno aritmetické operace s fuzzy čísly převést na operace s jejich řezy. Tento koncept je aplikovatelný na libovolnou fundamentální nelineární funkci bez jakýchkoliv podmínek. Koncept ALOP je prakticky efektivnější než princip rozšíření. Cílem příspěvku je prohloubení znalostí studentů a odborníků v oblasti efektivního využití vágnosti ve společenských vědách [2] [3].

---

[1] NOVÁK, V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* SNTL Praha, 1990, ISBN 80-03-00325-3.
[2] NOVÁK, V. *Základy fuzzy modelování.* BEN Praha, 2000, ISBN 80-7300-009-1.
[3] POKORNÝ, M. Umělá inteligence v modelování a řízení. BEN Praha, 1996, ISBN 80-901984-4-9.

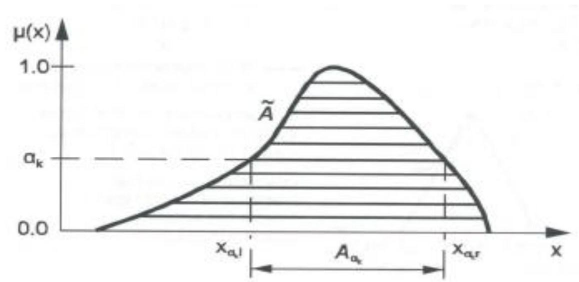
2 Procedury α-řezů a α-diskretizace fuzzy množiny

Procedura α-diskretizace [4] představuje variantní formalizaci fuzzy množiny pomocí množiny jejích α-řezů. Množina α-řezů $\underline{A}_{\alpha}$ fuzzy množiny $\widetilde{A}$ je obyčejná množina

$$\underline{A}_{\alpha} = \{\underline{x} \in \underline{X} \mid \mu_{\widetilde{A}}(\underline{x}) \geq \alpha_k\}, \qquad \alpha_k \in \langle 0,1 \rangle \tag{1}$$

Příklad α-diskretizace fuzzy množiny $\widetilde{A}$ pomocí deseti α-řezů $A_{\alpha_k}, k = 1,\ldots,10$, je uveden na Obrázku 1.

Obrázek 1: α-diskretizace fuzzy množiny



Všechny α_k - řezy jsou obyčejnými podmnožinami nosiče fuzzy množiny $\widetilde{A}$, označeného $S(\widetilde{A})$. Proto platí

$$\underline{A}_{a_k} \subseteq \underline{A}_{a_i\,k} \quad \forall \ \alpha_i; \alpha_k \in \langle 0,1 \rangle, \ \alpha_i \geq \alpha_k \tag{2}$$

Pokud je – v jednorozměrném případě - množina $\widetilde{A}$ konvexní, všechny α-řezy $\underline{A}_{a_k}$ jsou uzavřené spojité intervaly $\lfloor x_{\alpha_k,l}, x_{\alpha_k,r} \rfloor$, kde

$$x_{\alpha_k,l} = \min[x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha_k] \tag{3}$$

$$x_{\alpha_k,r} = \max[x \in X \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq \alpha_k] \tag{4}$$

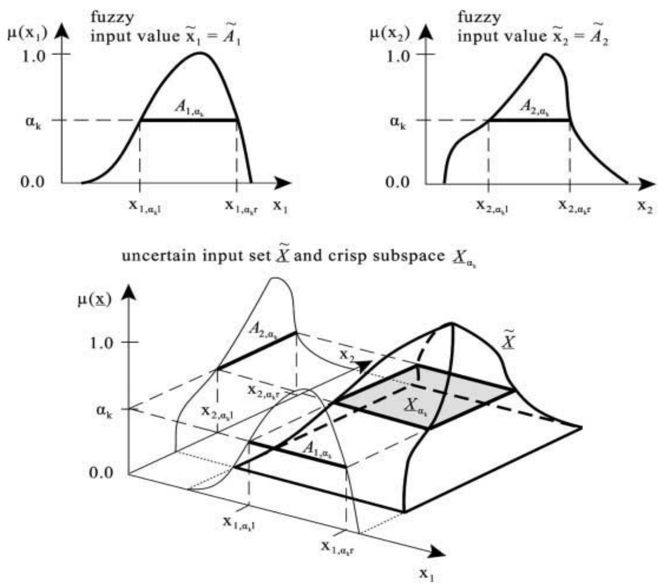
Pro dostatečně vysokou hodnotu *k* může pak být fuzzy množina $\widetilde{A}$ formalizována množinou svých α-řezů

$$\widetilde{A} = [\mu(A_{\alpha_k}) = \alpha_k] \ \forall \ \alpha_k \in (0,1\rangle \ ] \tag{5}$$

[4] MÖLLER, B., BEER, M. Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics. Springer-Verlag Berlin. 2004. ISBN 3-540-40294-2.

V případě n-rozměrné fuzzy množiny je α_k-řez reprezentován n-rozměrným obyčejným podprostorem. Na Obrázku 2 je pro případ dvojrozměrné vstupní fuzzy množiny [5] [6] [7] (n = 2) podprostor α_k–řezu reprezentován obdélníkem $\underline{X}_{\alpha_k}$

Obrázek 2: Dvojrozměrný podprostor α-řezu $\underline{X}_{\alpha_k}$



3 Procedura α-optimalizace (ALOP)

Uvažujme obyčejný fundamentální vícerozměrný model M soustavy typu MIMO (Multi-Imput-Multi-Output)

$$M : \underline{y} = f(\underline{x}) = f(x_1,...,x_n) \tag{6}$$

Proveďme znejistění modelu do tvaru

$$\underline{\tilde{y}} = \tilde{f}(\underline{\tilde{x}}) \tag{7}$$

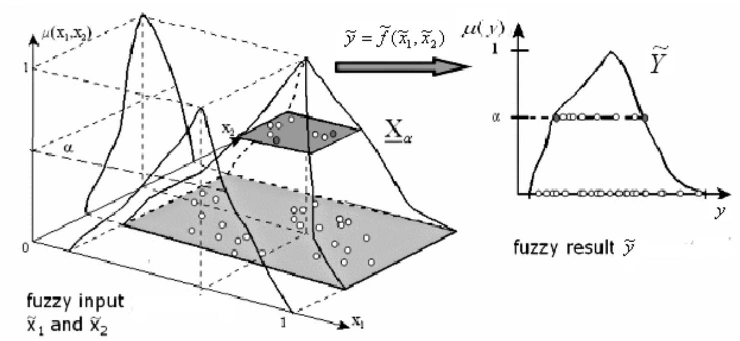
[5] DUBOIS, D., PRADE, H. *Fuzzy Numbers: An Overview*. in: Analysis of Fuzzy Information (Bezdek, J.C. – Ed.), Vol. 2, CRC–Press, Boca Raton 1988, 3–39.
[6] MAREŠ, M. Weak Arithmetics of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems* 91 (1997), 2, str.143–154.
[7] NOVÁK, V., PERFILIEVA, I., MOČKOŘ, J. *Mathematical Principles of Fuzzy Logic.* Kluwer, Boston. 1999.

fuzzifikací jeho vstupních proměnných $(x_1,...,x_n)$. Pro stanovení funkcí příslušnosti jeho vícerozměrné fuzzy výstupní veličiny $\underline{\tilde{y}}$ použijeme α-optimalizační proceduru.

Fuzzy množiny všech vstupních proměnných (fuzzy čísel) $\underline{\tilde{x}}$ jsou diskretizovány toutéž úrovní α_k, k = 1,2,......, n a je definován vstupní podprostor $\underline{X}_{\alpha_k}$

Fundamentální analytickou funkcí (6) transformujeme prvky $\underline{x}$ vstupního podprostoru $\underline{X}_{\alpha_k}$ na prvky y_j výstupního prostoru $\underline{y}$ = (y_1, …… y_m), j = 1,…, m, které představují prvky obyčejné množiny α-řezu fuzzy množiny $\tilde{Y}_{j,\alpha_k}$ výstupní fuzzy proměnné $\underline{\tilde{y}}$ na úrovni jejího α_k- řezu.

Obrázek 3: Nalezení hraničních bodů řezu výstupní fuzzy množiny



V dalším kroku je použita optimalizační procedura, pomocí níž jsou nalezeny největší $y_{\alpha_k,r}$ a nejmenší $y_{\alpha_k,l}$ prvky množiny α_k.-řezu jako jeho prvky marginální. Tyto prvky pak tvoří dva body funkce příslušnosti

$$\mu(y_j) = \mu_{\tilde{B}_j}(y_j) \tag{8}$$

Na Obrázku 3 jsou tyto marginální prvky na α-řezu výstupní funkce příslušnosti $\tilde{Y}$ označeny černě.

Při dostatečném počtu α-řezů je těmito body určena celá výstupní fuzzy množina $\tilde{Y}$.

Určování marginálních bodů $y_{\alpha_k,r}$ a $y_{\alpha_k,l}$ tak nahrazuje max-min operátor Zadehova principu rozšíření [8] [9] [10].

Úloha nalezení největšího $y_{\alpha_k,r}$ a nejmenšího $y_{\alpha_k,l}$ prvku α-řezu výstupní fuzzy množiny $\tilde{Y}$ pro každý α-řez představuje vlastní α-optimalizační proceduru ALOP. Účelové funkce této optimalizační procedury jsou

---

[8] MOLLER, B., GRAF, W., BEER, M. Fuzzy Structural Analysis Using α-level Optimization. *Computational Mechanics,* 26(6), 2000.
[9] CELIKYILMAZ, A., TURKSEN, I. B. *Modelling Uncertainty with Fuzzy Logic.* Springer, 2009. ISBN 978-3-540-89923-5.
[10] OLEJ, V., OBRŠÁLOVÁ, I., KŘUPKA, J. Modelling of Selected Areas of Sustainable Development by Artificial Intelligence. University of Pardubice, 2009. ISBN 978-80-247-3167-4.

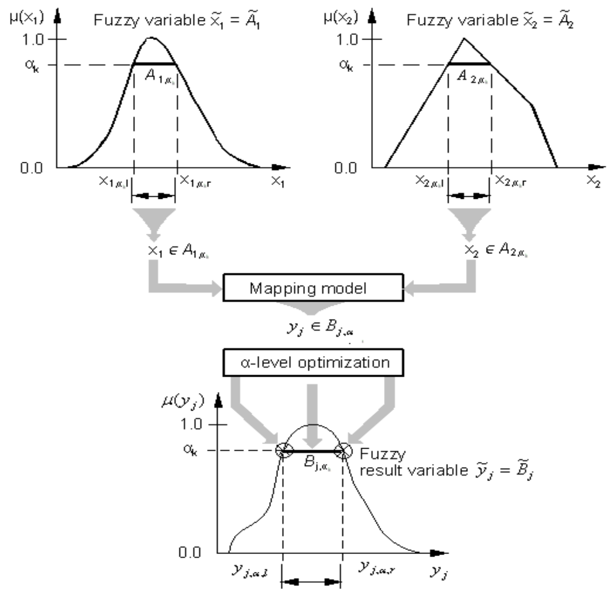
$$y_{\alpha_k,l} = \max\ f_j(x_{1,\dots,}x_n) \Rightarrow Max|\ (x_{1,\dots,}x_n) \in X_\alpha$$

(9)

$$y_{\alpha_k,r} = \min\ f_j(x_{1,\dots,}x_n) \Rightarrow Min|\ (x_{1,\dots,}x_n) \in X_\alpha$$

Požadavky $(x_{1,\dots,}x_n) \in X_\alpha$ jsou omezovacími podmínkami α-optimalizační procedury. Optimální hodnoty y_{opt} odpovídají optimálním hodnotám vstupního podprostoru $x_{opt} \in X_\alpha$, jejichž transformacím tento bod odpovídá (Obrázek 4).

Obrázek 4: Schématický postup procedury ALOP



4 Numerický příklad použití procedury ALOP

Programový systém procedury pro fuzzy analýzu ALOP je v současné době na pracovišti autora vyvíjen. Jako numerický příklad jejího použití je proto uvedeno řešení, převzaté i s obrázky z literatury[11]. Toto řešení uvádí výpočet tvaru výstupní fuzzy množiny fuzzy funkce jak pomocí Zadehova principu rozšíření, tak pomocí procedury ALOP a porovnává dosažené výsledky.

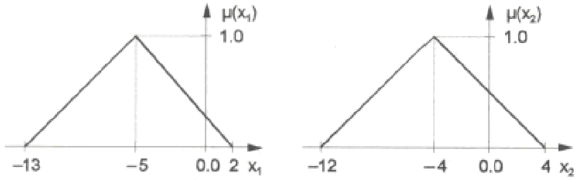
Uvažujme fundamentální funkci

$$y = f(x_1, x_2) = 0.01x_1^3 + 0.17x_1^2 + 0,48x_1 + 0.01x_2^3 + 0.13x_2^2 + 0.03x_2 + 0.65 \quad (10)$$

Vstupní proměnné x_1, x_2 jsou definovány jako fuzzy čísla (Obrázek 5)

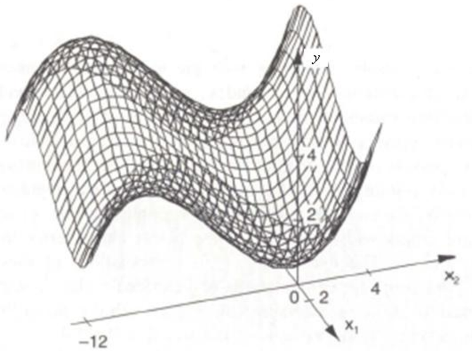
[11] MÖLLER, B., BEER, M. Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics. Springer-Verlag Berlin. 2004. ISBN 3-540-40294-2.

Obrázek 5: Fuzzy čísla x1, x2

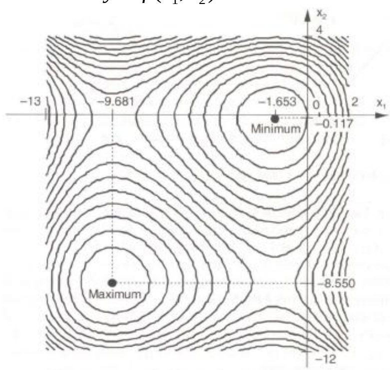


Funkce (10) není jednoznačným zobrazením, každá hodnota y může být vypočtena z nekonečného počtu různých kombinací hodnot argumentů x_1, a x_2.

Obrázek 6: Tvar fundamentální funkce $y = f(x_1, x_2)$



Obrázek 7: Extrémy fundamentální funkce $y = f(x_1, x_2)$



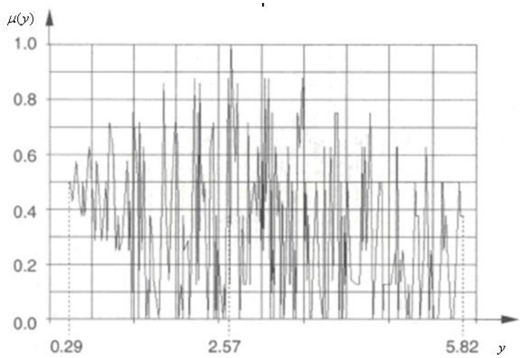
Funkce (10) je spojitá, výstupní fuzzy proměnná $\tilde{y}$ bude proto také spojité fuzzy číslo. Grafické znázornění tvaru dvojrozměrné funkce (10) je uvedeno na Obrázku 6, poloha jejích extrémů je znázorněna na Obrázku 7.. Body sítě funkce jsou vypočítány pro diskrétní hodnoty nosičů $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$. Funkce má lokální minimum y_{min} = 0,274 pro [x_1 = -1.653, x_2 = -0.117] a lokální maximum y_{max} = 5.859

pro [x_1 = -9.681, x_2 = -8,550]. V uvažovaném vstupním prostoru jsou tyto extrémy současně i extrémy globální.

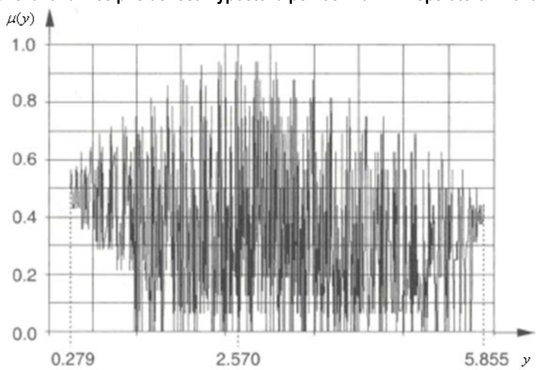
4.1 Výpočet aplikací Zadehova principu rozšíření

Při použití principu rozšíření jsou hodnoty funkce příslušnosti výstupní fuzzy proměnné $\tilde{y}$ vypočteny aplikací max-min operátoru. Diskretizace nosičů fuzzy čísel vstupních proměnných $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$ byla provedena s krokem Δx = 1.0. Výpočet tak obsahuje celkem 272 hodnot y (10). Určení jejich 272 hodnot funkce příslušnosti $\mu(y)$ s využitím max-min operátoru dává výsledek uvedený na Obrázku 8.

Obrázek 8: Diskretizovaná funkce příslušnosti vypočtená pomocí max-min operátoru z 272 kombinací



Obrázek 9: Diskretizovaná funkce příslušnosti vypočtená pomocí max-min operátoru z 1023 kombinací



Zmenšením kroku diskretizace na Δx = 0.5 dostaneme 1023 kombinací, jejich vyhodnocením max-min operátorem dostaneme výstupní funkci příslušnosti ve tvaru Obrázku 9.

Zvýšením počtu kombinací hodnot vstupních proměnných konverguje numerické řešení k přesné hodnotě $\tilde{y}$.

4.2 Výpočet aplikací optimalizační procedury ALOP [2]

Fuzzy čísla vstupních proměnných jsou konvexní a fundamentální funkce je spojitá. Pro diskretizaci funkcí příslušnosti vstupních a výstupní fuzzy proměnné je interval <0,1> rozdělen ekvidistantně do 11 úrovní (α-řezů).

n- rozměrné α-řezy $\underline{X}_{\alpha_k}$ (Obrázek 3) jsou diskretizovány a na jejich *n*- rozměrné diskrétní hodnoty je aplikována transformační funkce (10). Tím jsou získány hodnoty α-řezu funkce příslušnosti výstupní fuzzy veličiny $\tilde{Y}_{\alpha_k}$ (Obrázek 4).

V každém α-řezu $\tilde{Y}_{\alpha_k}$ je řešena optimalizační úloha (9) , pomocí níž jsou vhodnou optimalizační procedurou nalezeny maximální a minimální hodnoty $y_{\alpha_k l}$, a $y_{\alpha_k r}$, které tvoři marginální prvky řezu $\tilde{Y}_{\alpha_k}$ a tedy body funkce příslušnosti $\tilde{Y}$. Navíc lze zjistit i prvky podporostoru $\underline{X}_{\alpha_k}$, které těmto extrémním výstupním hodnotám v daném řezu patří ($x_{1opt,\alpha_k l}$, $x_{2,opt,\alpha_k r}$). Výsledky jsou uvedeny v Tabulce 1. Body výsledné funkce příslušnosti $\tilde{Y}$ jsou uvedeny v šedých polích.

Pro řešení optimalizační úlohy (9) jsou důležité vlastnosti fundamentální funkce $f(x_1,...,x_n)$ (6). Optimalizační metoda musí respektovat zejména její jednoznačnost, spojitost, monotónnost a dimenzionalitu vstupního $\underline{X}_{\alpha_k}$ a výstupního prostoru $\underline{Y}_{\alpha_k}$ [12] [13] [4,10]

Metoda pro řešení optimalizační úlohy (9) musí být nezávislá na tvaru účelové funkce a spolehlivá v nalezení jejích globálních extrémů. Požadavky obvykle není schopna splnit metoda jediná a používají se proto jejich kombinací. Nejčastěji jsou kombinovány metody evolučních strategií, gradientní metody a metoda Monte Carlo.

Softwarová realizace α-optimalizační procedury ALOP a její využívání pro fuzzy analýzu systémů z oblasti podnikové ekonomiky a veřejné ekonomie bude jedním z výsledků řešení projektu Vývoj nekonvenčních metod manažerského rozhodování v oblasti podnikové ekonomiky a veřejné ekonomie, který je v současné době na MVŠO řešen [14] [15] [16].

[12] MÖLLER, B., BEER, M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer-Verlag Berlin. 2004. ISBN 3-540-40294-2.
[13] OLEJ, V., OBRŠÁLOVÁ, I., KŘUPKA, J. *Modelling of Selected Areas of Sustainable Development by Artificial Intelligence.* University of PARDUBICE, 2009. ISBN 978-80-247-3167-4.
[14] MÖLLER, B., BEER, M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer-Verlag Berlin. 2004. ISBN 3-540-40294-2.
[15] HÁJEK, P. *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Dordrecht 1998.
[16] KLIR, B. J., YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application.* Prentice Hall, New Jersey, 1995.

Tabulka 1: Stanovení fuzzy množiny výstupní proměnné $\tilde{y}$ pomocí optimalizační procedury ALOP

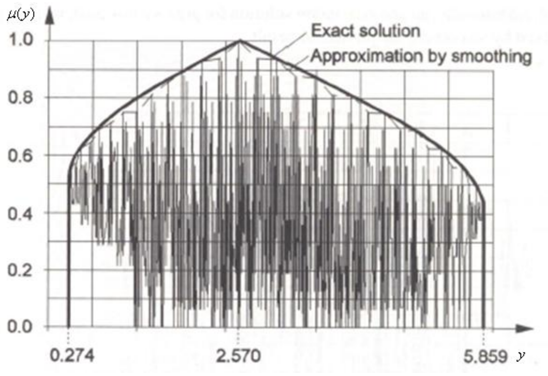
α_k	Marginální body množin alfa-řezů fuzzy množin vstupních proměnných				Minimální hodnoty y a jim odpovídající hodnoty x1, x2			Maximální hodnoty y a jim odpovídající hodnoty x1, x2		
	$x_{1,\alpha_k l}$	$x_{1,\alpha_k r}$	$x_{2,\alpha_k l}$	$x_{2,\alpha_k r}$	$x_{1_{opt},\alpha_k,l}$	$x_{2_{opt},\alpha_k,l}$	$y_{\alpha k,l}$	$x_{1_{opt},\alpha_k,r}$	$x_{2_{opt},\alpha_k,r}$	$y_{\alpha k,r}$
0.0	-13.0	2.0	-12.0	4.0	-1.653	-0.117	0.274	-9.681	-8.550	5.859
0.1	-12.2	1.3	-11.2	3.2	-1.653	-0.117	0.274	-9.681	-8.550	5.859
0.2	-11.4	0.6	-10.4	2.4	-1.653	-0.117	0.274	-9.681	-8.550	5.859
0.3	-10.6	-0.1	-9.6	1.6	-1.653	-0.117	0.274	-9.681	-8.550	5.859
0.4	-9.8	-0.8	-8.8	0.8	-1.653	-0.117	0.274	-9.681	-8.550	5.859
0.5	-9.0	-1.5	-8.0	0.0	-1.653	-0.117	0.274	-9.000	-8.000	5.770
0.6	-8.2	-2.2	-7.2	-0.8	-2.200	-0.800	0.364	-8.200	-7.200	5.422
0.7	-7.4	-2.9	-6.4	-1.6	-2.900	-1.600	0.688	-7.400	-6.400	4.866
0.8	-6.6	-3.6	-5.6	-2.4	-3.600	-2.400	1.197	-6.600	-5.600	4.165
0.9	-5.8	-4.3	-4.8	-3.2	-4.300	-3.200	1.842	-5.800	-4.800	3.379
1.0	-5.0	-5.0	-4.0	-4.0	-5.000	-4.000	2.570	-5.000	-4.000	2.570

Na Obrázku 10[17] jsou porovnány výsledky, dosažené Zadehovou metodou rozšíření a procedurou α-optimalizace ALOP.

Výsledky obou diskretizačních kroků Zadehovy metody (Obrázek 8 plus Obrázek 9) jsou spojeny a funkce příslušnosti vstupní proměnné $\mu(y)$ je aproximována lomenou čárkovanou čarou. Spojitou křivkou je pak aproximována funkce příslušnosti fuzzy množiny $\tilde{Y}$, získaná procedurou ALOP.

[17] MÖLLER, B., BEER, M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer-Verlag Berlin. 2004. ISBN 3-540-40294-2.

Obrázek 10: Aproximace funkce příslušnosti výstupní proměnné $\mu(y)$



5 Diskuze

Základním nástrojem fuzzy analýzy je fuzza aritmetika, využívající především Zadehova principu rozšíření. Vztahy podle tohoto principu jsou však obtížně aplikovatelné v případech složitých fundamentálních funkcí, vyžadují diskretizaci nosičů fuzzy množin vstupních proměnných i parametrů funkce a mohou vést k výpočtovým problémům použitých numerických metod. Pro fuzzy analýzu je proto výhodnější použít metodu tzv. α-ptimalizace, využívající α-řezů fuzzy množin (ALOP). Protože α-řezy funkcí příslušnosti takových fuzzy množin fuzzy čísel jsou spojité intervaly, je totiž možno aritmetické operace s fuzzy čísly převést na operace s jejich řezy. Tento koncept je aplikovatelný na libovolnou fundamentální nelineární funkci bez jakýchkoliv podmínek. Koncept ALOP je prakticky efektivnější, než princip rozšíření. Numerický příklad výpočtu složitější nelineární fuzzy funkce ilustruje příklad použití procedury α-optimalizace a srovnává její výsledky s řešením využívajícím Zadehova principu rozšíření.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl s finanční podporou a v rámci řešení projektu GAČR P403/12/1811: Vývoj nekonvenčních metod manažerského rozhodování v podnikové ekonomii a veřejné ekonomice.

Literatura

[1] NOVÁK, V. *Fuzzy množiny a jejich aplikace.* SNTL Praha, 1990, ISBN 80-03-00325-3.

[2] NOVÁK, V. *Základy fuzzy modelování.* BEN Praha, 2000, ISBN 80-7300-009-1.

[3] POKORNÝ, M. *Umělá inteligence v modelování a řízení.* BEN Praha, 1996, ISBN 80-901984-4-9.

[4] MÖLLER, B., BEER, M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer-Verlag Berlin. 2004. ISBN 3-540-40294-2.

[5] D. DUBOIS, H. PRADE: Fuzzy Numbers: An Overview. in: *Analysis of Fuzzy Information* (Bezdek, J.C. – Ed.), Vol. 2, CRC–Press, Boca Raton 1988, 3–39.

[6] MAREŠ, M. Weak Arithmetics of Fuzzy Numbers. Fuzzy Sets and Systems 91 (1997), 2, str.43–154.

[7] NOVÁK, V., PERFILIEVA, I., MOČKOŘ, J. *Mathematical Principles of Fuzzy Logic*. Kluwer, Boston. 1999.

[8] MOLLER, B., GRAF, W., BEER, M. *Fuzzy Structural Analysis Using □-level Optimization*. Computational Mechanics, 26(6), 2000.

[9] CELIKYILMAZ, A., TURKSEN, I.B. *Modelling Uncertainty with Fuzzy Logic*. Springer, 2009. ISBN 978-3-540-89923-5.

[10] OLEJ, V., OBRŠÁLOVÁ, I., KŘUPKA, J. *Modelling of Selected Areas of Sustainable Development by Artificial Intelligence*. University of Pardubice, 2009. ISBN 978-80-247-3167-4.

[11] HÁJEK, P. *Metamathematics of Fuzzy Logic*. Kluwer, Dordrecht 1998.

[12] KLIR, B.J., YUAN, B. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application.* Prentice Hall, New Jersey, 1995.