FUZZY ANALÝZA SLOŽITÝCH NEURČITÝCH SOUSTAV - I

FUZZY ANALYSIS OF COMPLEX VAGUE SYSTEMS - I

Miroslav Pokorný
Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., Ústav informatiky,
miroslav.pokorny@mvso.cz

Abstrakt:
Příspěvek uvádí fuzzy analýzu jako metodu řešení analytických funkcí - abstraktních modelů složitých neurčitých soustav, jejichž proměnné a/nebo parametry jako ostrá (obyčejná) čísla jsou znejistěny (fuzzifikovány) do tvaru fuzzy čísel. Instruktážní příspěvek uvádí přístup k vybudování fuzzy aritmetiky s využitím Zadehova principu rozšíření. Metoda je dokumentována numerickými příklady.

Abstract:
The paper presents a fuzzy analysis as a method of analytical functions solution as an abstract models of complex vague systems whose variables and/or parameters as crisp (ordinary) numbers are insecured (fuzzified) in the form of fuzzy numbers. The Zadeh´s extensional principle is introduced as approach to build a fuzzy arithmetic. The numeric examples are presented to illustrate the method.

Klíčová slova:
náhodný systém, neurčitý systém, fuzzy-stochastický systém, fuzzy číslo, fuzzy aritmetika, princip rozšíření, fuzzy analýza

Key words:
stochastic system, vague system, fuzzy-stochastic system, fuzzy number, fuzzy arithmetic, extension principle, fuzzy analysis

***JEL Classification**: C 51*

1 Úvod

Všechny systémy reálného světa jsou typické svojí přirozenou nejistotou a neurčitostí. Metody pro jejich zkoumání nemohou jejich nejistoty a neurčitosti ignorovat, musí zahrnovat procedury, které umožňují tyto vlastnosti formalizovat a efektivně využívat. Standardními metodami pro zpracování nedeterministických fenoménů složitých reálných soustav jsou obvykle metody matematické statistiky [1], [2].

Základní podmínkou korektnosti statistických metod je reprodukovatelnost podmínek při získávání dat, přičemž systém, jehož data shromažďujeme do výběrových souborů, je považován za zcela přesně definovaný, se zcela určitým popisem jeho vlastností (obyčejný, analytický matematický model).

Systémy společenských a sociálních věd jsou typické jak stochastickým (náhodným) charakterem svých numerických proměnných, tak i zahrnutím lidského faktoru, složitostí, špatnou definovatelností, obtížnou měřitelností a kauzální neurčitosti svých struktur a parametrů. Trpí nedostatkem informací o vzájemných vztazích a matematických popisech souvislostí jejich náhodných veličin. Vznikají problémy s platností řady apriorních předpokladů, nezbytných pro korektnost statistických metod.

Náhodný (stochastický) systém vykazuje závislost svých vlastností na působení vnějších i vnitřních vlivů, které přitom nelze předem stanovit a zohlednit. Naproti tomu neurčitý (fuzzy) systém je takový, k jehož popisu nemáme dostatek dat a informací, existující informace o jeho vlastnostech jsou neúplné a nepřesné, naše znalosti o souvislostech jeho proměnných jsou jen přibližné. Metody řešení takových systémů využívají přístupů umělé inteligence [3], [4] fuzzy množinové matematiky [5], [6]. Výsledky řešení, získané metodami matematické statistiky prostřednictvím náhodných dat, jsou často nadměrně znehodnocovány skutečností, že vyšetřovaný náhodný systém je současně i neurčitý.

Abstraktní formalizace takových systémů vyžaduje využití metod, integrujících přístupy stochastické s fuzzy přístupy. Exaktní matematické procedury pak formalizují modely fuzzy-stochastických systémů s fuzzy-stochastickými proměnnými. Fuzzy-stochastickou proměnnou lze chápat jako náhodnou veličinu, která byla měřena za neurčitých nebo měnících se podmínek.

Nástrojem k modelováním fuzzy-stochastických soustav a vyšetřováním jejich chování je fuzzy-stochastická analýza. Teorii fuzzy-stochastické analýzy lze přitom budovat hierarchicky jako výchozí fuzzy analýzu, rozšířenou v dalším kroku zahrnutím stochastických jevů.

Následující kapitoly jsou věnovány úvodní fuzzy analýze jako metodě řešení analytických (fundamentálních) funkcí - abstraktních modelů soustav, jejichž proměnné a/nebo parametry jako ostrá (obyčejná) čísla jsou znejistěny (fuzzifikovány) do tvaru fuzzy čísel. Cílem příspěvku je prohloubení znalostí studentů a odborníků v oblasti efektivního využití vágnosti ve společenských vědách.

2 Fuzzifikace ostrých číselných hodnot

Neurčitost ostrých čísel (*a* = 5,6; *b* = 22,3) vyjadřujeme v přirozeném jazyce pomocí slovních kvantifikátorů, např. [*a* je „*asi*“ 5], [*b* je „*zhruba* 22“]. Intenzita jazykových kvantifikátorů je v případě znalosti daného konceptu člověkem dobře interpretovatelná a efektivně použitelná [7].

Neurčitost ostrého čísla formalizujeme nejčastěji pomocí aparátu fuzzy množinové matematiky. Fuzzy množina $\widetilde{A}$ je definována jako zobrazení, která přiřazuje každému prvku *x* univerza *X* číslo $\mu_{\widetilde{A}}(x) \in \langle 0,1 \rangle$ jako stupeň jeho příslušnosti do množiny $\widetilde{A}$ [8]

$$\widetilde{A} = \{x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) \mid x \in X\},\ \mu_{\widetilde{A}}(x) \geq 0 \quad \forall x \in X \tag{1}$$

Alespoň po částech spojitou funkci $\mu_{\widetilde{A}}(x) = f(x)$ nazýváme funkcí příslušnosti, která fuzzy množinu $\widetilde{A}$ jednoznačně definuje. Jestliže platí

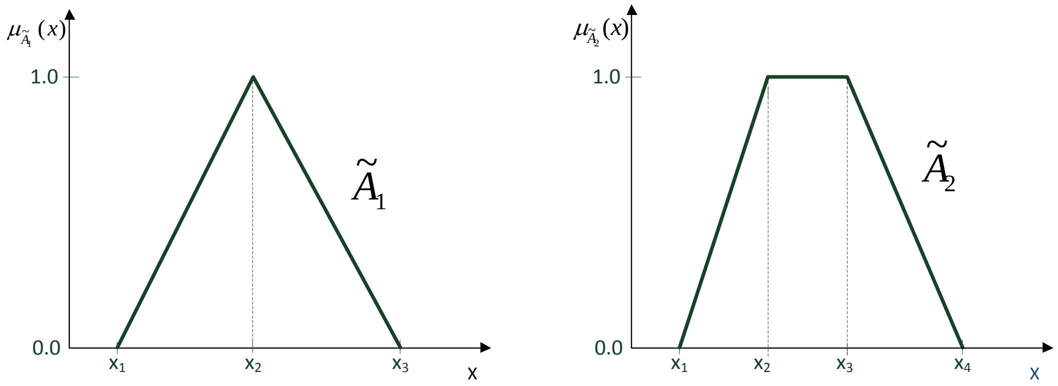
$$\sup\lfloor \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1 \rfloor \quad \forall x \in X \tag{2}$$

a současně fuzzy množina $\widetilde{A}$ splňuje podmínku konvexnosti

$$\mu_{\widetilde{A}}(x_2) \geq \min\lfloor \mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_3) \rfloor \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in X, x_1 \leq x_2 \leq x_3 \tag{3}$$

pak fuzzy množinu $\tilde{A}$ nazýváme normální. Funkce příslušnosti je v inženýrské praxi obvykle aproximována lomenou přímkou. Na Obrázku 1 jsou uvedeny dvě důležité aproximace – trojúhelníková a lichoběžníková.

Obrázek 1: Trojúhelníková a lichoběžníková aproximace funkce příslušnosti



Normální trojúhelníková fuzzy množina $\tilde{A}_1$ pak formalizuje neurčité číslo (fuzzy číslo) „*asi* x_2“. Stupeň neurčitosti čísla x_2 je dána šířkou nosiče fuzzy množiny $\tilde{A}_1$ jako uzavřeného intervalu $\langle x_1, x_3 \rangle$ - viz Obrázek 1. Parametry takových fuzzy množin tvoří uspořádaný vektor hodnot bodů zlomu $[x_1, x_2, x_3]$ případně u fuzzy množiny $\tilde{A}_2$ $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Pomocí tohoto vektoru jsou také fuzzy množiny $\tilde{A}_1$ nebo $\tilde{A}_2$ počítačově formalizovány.

3 Kartézský součin fuzzy množin

Uvažujme fuzzy množiny $\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n$ definované na univerzech $X_1,...,X_n$. Kartézským součinem

$$\tilde{K} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 \times ... \times \tilde{A}_n \tag{4}$$

nazveme *n*- rozměrnou fuzzy množinu, definovanou na *n*- rozměrném univerzu

$$\underline{X} = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$$

(5)

Funkci příslušnosti fuzzy množiny kartézského součinu $\tilde{K}$

$$\mu_{\tilde{K}}(\underline{x}) = \mu_{\tilde{K}}(x_1,...,x_n)$$

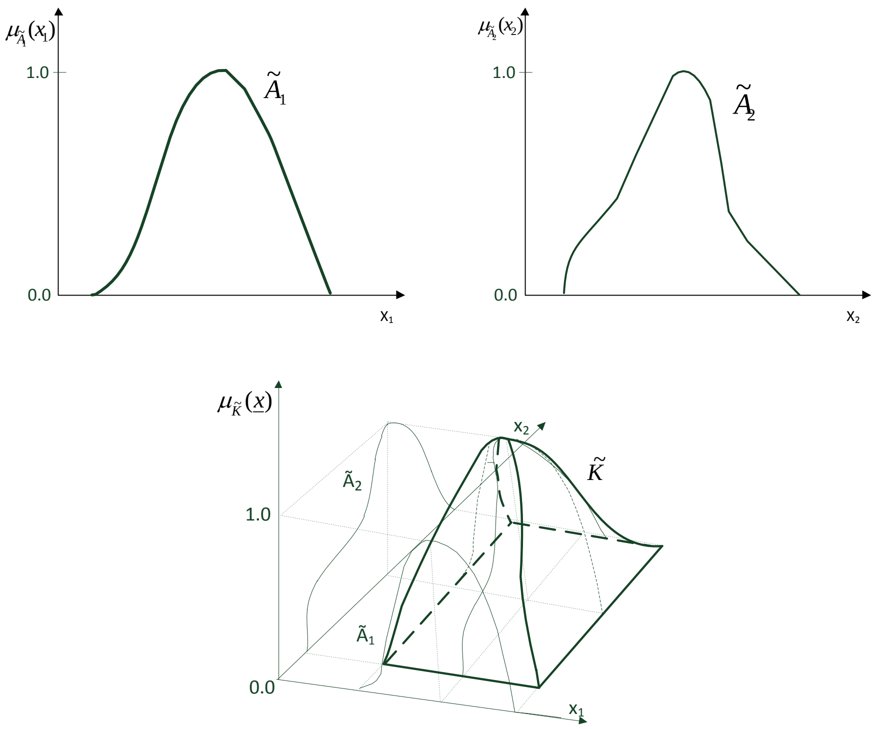
definujeme vztahem

$$\tilde{K} = \{(\underline{x} = (x_1,...,x_n), \mu_{\tilde{K}}(\underline{x}) = \mu_{\tilde{K}}(x_1,...,x_n) \mid x_i \in X_i;\ \mu_{\tilde{K}}(\underline{x}) = \min_{i=1,...,n} \lfloor \mu_{\tilde{A}_i}(x_i) \rfloor\} \tag{6}$$

Pro dvojrozměrné univerzum je dvojrozměrná fuzzy množina kartézského součinu $\tilde{K}$ ve tvaru jehlanu nakreslena na Obrázku 2.

Kartézský součin je důležitým pojmem v řešení problému vybudování aritmetiky fuzzy čísel s využitím Zadehova principu rozšíření (viz dále podkap.6.1).

Obrázek 2: Kartézský součin dvou fuzzy množin



4 Fuzzifikace anyalytických funkcí

Fuzzy funkcí $\tilde{f}(\underline{\tilde{s}}, \underline{\tilde{x}})$ rozumíme závislost, definovanou s použitím vektoru fuzzy argumentů $\tilde{x}$ a vektoru fuzzy parametrů $\tilde{s}$ Výstupní veličinou takové fuzzy funkce je vždy fuzzy veličina $\tilde{y}$

$$\underline{\tilde{y}} = \tilde{f}(\underline{\tilde{s}}, \underline{\tilde{x}}) \tag{7}$$

Obecně jde o transformaci prostoru vstupních fuzzy proměnných $\underline{\tilde{x}}$ do prostoru výstupních fuzzy proměnných $\underline{\tilde{y}}$

$$\underline{\tilde{x}} \rightarrow \underline{\tilde{y}} \tag{8}$$

Uvažujme obyčejnou analytickou funkci s jednou výstupní proměnnou a vícerozměrným argumentem

$$\underline{y} = f(\underline{s}, \underline{x}) \tag{9}$$

kde $\underline{s}$ a $\underline{x}$ jsou vektory jejích parametrů a argumentů definované jako obyčejná (ostrá) reálná čísla. Odpovídající fuzzy funkcí pak nazveme modifikovaný výraz (9), kde $\underline{\tilde{s}}$ a $\underline{\tilde{x}}$ jsou vektory jejích fuzzy parametrů a fuzzy argumentů jako fuzzy čísel, formalizovaných trojúhelníkovými fuzzy množinami $\underline{\tilde{S}}$ a $\underline{\tilde{X}}$. Hodnota závisle proměnné $\tilde{y}$ je pak fuzzy číslo formalizované fuzzy množinou $\tilde{Y}$. Například jednorozměrnou fuzzy funkci

$$\tilde{y} = \tilde{f}(\underline{\tilde{s}} \,.\, \tilde{x}) = \tilde{s}_1.\tilde{x} + \tilde{s}_2 \tag{10}$$

lze interpretovat jazykovou konstrukcí, např.

[„*asi y*“] se rovná [„*zhruba* s_1“] krát [„*přibližně x*“] plus [„*téměř* s_2“]

Dalšími možnými variantami fuzzy funkce (7) jsou pak

$$\underline{\tilde{y}} = \tilde{f}(\underline{\tilde{s}}\,,\ \underline{x}) \tag{11}$$

jako fuzzy funkce s fuzzy parametry a ostrými argumenty nebo

$$\underline{\tilde{y}} = \tilde{f}(\underline{s}\,,\ \underline{\tilde{x}}) \tag{12}$$

jako fuzzy funkce s ostrými parametry a fuzzy argumenty.

5 Stanovení neurčitosti (fuzzifikace) číselných hodnot

Cílem zavedení formální nejistoty do matematických popisů soustav je respektování jejich neurčitosti a zvýšení adekvátnosti jejich abstraktních modelů. Proces fuzzifikace je především procesem subjektivním, který musí využít všech dostupných informací o vlastnostech a chování popisované soustavy.

Obecný algoritmus pro fuzzifikaci ostrých parametrů a proměnných neexistuje. Základem pro určení tvaru funkce příslušnosti fuzzy čísla je volba vhodného rozhodovacího kritéria, podle kterého je každé naměřené hodnotě podle určitého rozhodovacího kritéria přiřazena velikost její příslušnosti. Podle typu použitých informací můžeme použít kombinaci čtyř základních postupů [9].

5.1 Postup využívající zpracování souboru naměřených hodnot

Základem metody je soubor naměřených hodnot neurčité veličiny. Rozhodovací kritérium je dáno přímo velikostí naměřených hodnot. Počáteční strukturou pro proces její fuzzifikace je sloupcový graf, sestrojený z těchto hodnot metodou histogramu.

Tento graf je považován za výchozí podklad pro návrh tvaru funkce příslušnosti veličiny jako fuzzy čísla. Výchozí tvar funkce příslušnosti je získán spojitou aproximací středů temen jednotlivých sloupců grafu. Pro aproximaci je možno použít metody nejmenších čtverců, Takto získaná křivka je formalizována vhodnou analytickou funkcí (lineární funkce, polygonální funkce, kvadratická parabola, zvonová křivka) a její supremum je normováno na hodnotu hght = 1. Pro finální korekci tvaru funkce příslušnosti je možno použít subjektivních znalostí.

5.2 Postup využívající předpoklady správnosti jednotlivých měření

Jako rozhodovací kritérium je využita informace o přesnosti metody měření a apriorní znalost o měřené veličině. Jednotlivá měření jsou přiřazována do intervalů podle odhadované důvěryhodnosti velikosti jejich hodnot. Do pásma s nejvyššími hodnotami příslušnosti ($\mu(\underline{x})=1$) jsou tak vybrány ty naměřené hodnoty, které jsou považovány za víceméně určité. Nosič fuzzy množiny ($\mu(\underline{x})\geq 0$) je určen intervalem všech naměřených hodnot (s expertním vyloučením případných hodnot odlehlých). Přiřazení hodnot funkce příslušnosti zbylým naměřeným hodnotám je závislé na subjektivním rozhodnutí.

5.3 Postup využívající jazykovou kvantifikaci souboru naměřených hodnot

Naměřené hodnoty jsou uspořádány v číselném intervalu podle své velikosti. Rozhodovacím kritériem je subjektivní názor, které subintervaly je možno označit jako pásma hodnot např. „nízkých“, které „středních“ a které „vysokých“. Příslušné subintervaly jsou pak základem pro rozhodnutí o nosičích a tvarech funkcí příslušnosti jazykových hodnot *NÍZKÝ, STŘEDNÍ, VYSOKÝ.* Tak je vytvořena jazyková kvantifikace hodnot měřené veličiny jako veličiny neurčité.

Jako fuzzy číslo je pak vybrána ta jazyková hodnota (fuzzy množina), která odpovídá povaze řešené úlohy (úloha nákladová - *NÍZKÝ*, úloha výnosová - *VYSOKÝ*).

5.4 Postup využívající subjektivní znalosti o vlastnostech neurčité veličiny

Specifikace funkce příslušnosti fuzzy čísla reprezentujícího neurčitou veličinu je plně subjektivní. Rozhodovacím kritériem je odborný názor experta. V prvním kroku je odhadnuto jádro fuzzy množiny ($\mu(\underline{x})=1$), v kroku druhém pak její nosič ($\mu(\underline{x})\geq 0$). Pak je definován tvar fuzzy množny, v inženýrské praxi nejčastěji aproximovaný lomenou přímkou (Obrázek 1).

6 Fuzzy analýza

Fuzzy analýzou rozumíme vyšetřování vlastností a chování fuzzy funkce (7), která v inženýrské praxi představuje fuzzy model studované reálné soustavy. Obyčejný (ne-fuzzy) funkční vztah (9) budeme nazývat výchozí (fundamentální) funkcí. Jako algoritmus pro řešení fuzzifikovaného vztahu (7) použijeme v tomto příspěvku Zadehova principu rozšíření [7].

6.1 Zadehův princip rozšíření

Zadehův princip rozšíření je metoda rozšíření aritmetických operací nad obyčejnými čísly na operace nad fuzzy čísly. Je předpisem pro numerické řešení fuzzy operací fuzzy analýzy.

Uvažujme kartézský součin $\tilde{K}$ (4) definovaný na univerzu $\underline{X}$ (5). Označme $\tilde{K}$ jako *n*-rozměrnou fuzzy množinu $\underline{\tilde{X}}$. Princip rozšíření pak definuje zobrazení fuzzy množiny $\underline{\tilde{X}}$ na nové univerzum *Y*

$$y = f(x_1,...,x_n) \tag{13}$$

Funkce *f* (13) představuje libovolnou aritmetickou operaci nad fuzzy množinami (fuzzy čísly) $\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n$. Výsledkem zobrazení (fuzzy aritmetické operace) je fuzzy množina $\tilde{B}$ s funkcí příslušnosti $\mu_{\tilde{B}}(y)$. Uvažujme kartézský součin fuzzy množin $\tilde{A}_i$ definovaný na univerzu

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to Y \tag{14}$$

a uvažujme zobrazení

$$f(\tilde{A}_1,...,\tilde{A}_n) \Rightarrow \tilde{B} \text{ na } Y \tag{15}$$

kde fuzzy množina $\tilde{B}$ je výsledkem aritmetické operace $f(x_1,...,x_n)$

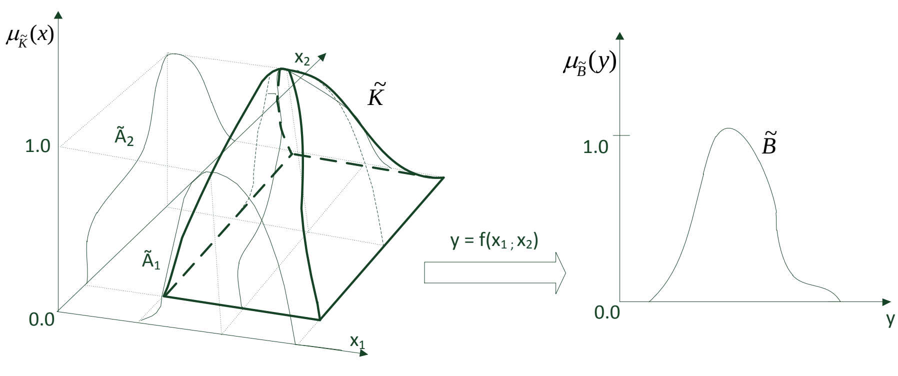
$$\tilde{B} = \{y, \mu_{\tilde{B}}(y) \mid y = f(x_1,...,x_n); \mathrm{y} \in \mathrm{Y}; (\mathrm{x}_1,...,x) \in X_1 \times ... \times X_n \} \tag{16}$$

Funkci příslušnosti $\mu_{\tilde{B}}(y)$ získáme podle předpisu Zadehova principu rozšíření. Podle tohoto principu se aplikací funkce $f(x_1,...,x_n)$ na prvky univerza $\underline{X}$ jejich stupně příslušnosti do libovolné fuzzy množiny nad $\underline{X}$ přenášejí beze změny na jejich obrazy. Stupeň příslušnosti prvku *y* k funkci příslušnosti $\mu_{\tilde{B}}(y)$ je roven minimu stupňů příslušnosti operandů $[\mu(x_1),...,\mu(x_n)]$. Pokud se k jednomu prvku *y* sejde více hodnot $\mu_{\tilde{B}}(y)$, platí operace *supremum*.

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x_1,...,x_n)} \min [\mu(x_1),...,\mu(x_n)], \; jestliže \quad \exists y = f(x_1,...,x_n) \\ \\ 0 \; jinak \end{cases} \tag{17}$$

Na Obrázku 3 je uveden případ pro dvojrozměrnou funkci $y = f(x_1, x_2)$, která transformuje kartézský součin $\tilde{K} = \tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2$ definovaný na dvojrozměrném univerzu $X_1 \times X_2$ na fuzzy množinu $\tilde{B}$ definovanou na jednorozměrném univerzu *Y*.

Obrázek 3: Aplikace Zadehova principu rozšíření



Velmi časté jsou případy, kdy funkce (15) je binární operací $(*)$ mezi fuzzy čísly $\tilde{A}, \tilde{B}$ definovanými na jednom univerzu *X*. Rozšířením takové binární operace na fuzzy množiny $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ s funkcemi příslušnosti $\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{B}}(x_2)$ je fuzzy množina $\widetilde{C}$ s funkcí příslušnosti $\mu_{\widetilde{C}}(y)$

$$\widetilde{C} = \widetilde{A} * \widetilde{B} \tag{18}$$

kde funkci příslušnosti $\mu_{\widetilde{C}=\widetilde{A}*\widetilde{B}}(y)$ získáme podle předpisu

$$\mu_{\widetilde{C}=\widetilde{A}*\widetilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup \min\left[\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{B}}(x_2)\right]; \mathrm{x}_1, x_2 \in X; \mathrm{y} = \mathrm{x}_1 * x_2 \\ \\ 0\, jinak \end{cases} \tag{19}$$

Na Obrázku 4 je uveden příklad aplikace Zadehova principu rozšíření na fuzzy funkci [9]

$$\widetilde{y} = 3\widetilde{A} - \widetilde{B} + 5\,. \tag{20}$$

Fuzzy čísla $\widetilde{A}$ a $\widetilde{B}$ nezávisle proměnných jsou diskrétní fuzzy množiny, jejichž nosiče jsou spočetné. Postup stanovení stupňů příslušnosti závisle fuzzy proměnné $\widetilde{C}$ je následující: operaci (18) postupně podrobíme všechny kombinace hodnot $\lfloor x_{1,j}, x_{2,k} \rfloor$, *j* = 1,2,..., *k* = 1,2,... nosičů fuzzy čísel $\widetilde{A}$ a $\widetilde{B}$, čímž dostaneme hodnoty nosiče y_m, *m* = 1,2,... fuzzy množiny $\widetilde{C}$. Stupeň příslušnosti každé hodnoty nosiče $\widetilde{C}$ získáme operací *min* (21)

$$\mu_{\widetilde{C}=f(x_{1,j},x_{2,k})}(y_m) = \sup_{j,k} \min\left\lfloor \mu(x_{1,j}), \mu(x_{2,k}) \right\rfloor \tag{21}$$

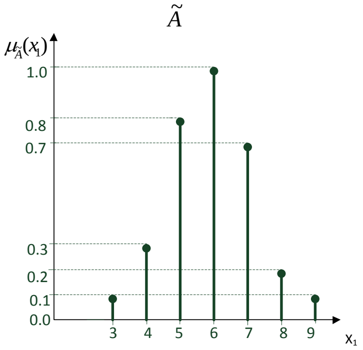
Pokud jednu a tutéž hodnotu y_m dostaneme výpočtem více kombinací $\lfloor x_{1,j}, x_{2,k} \rfloor$, pak k získání výsledné hodnoty $\mu_{\widetilde{C}=f(x_{1,j},x_{2,k})}(y)$ použijeme operace *sup* (21).

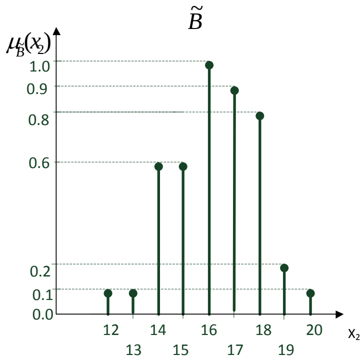
---

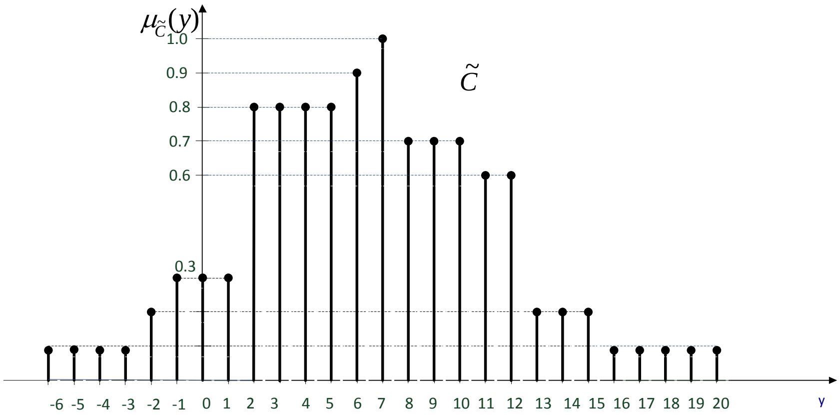
[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

Zadehův princip rozšíření tedy používáme k fuzzy analýze v těch případech, kdy potřebujeme převést operaci mezi obyčejnými čísly na operaci mezi fuzzy čísly (nebo obecně fuzzy množinami) [10]. Je považován za jeden z nejsilnějších prostředků teorie fuzzy množin.

Obrázek 4: Aplikace Zadehova principu rozšíření na funkci $\widetilde{y} = 3\widetilde{A} - \widetilde{B} + 5\,.$







Vztah (17) však není pro přímé výpočty složitějších fuzzy funkcí příliš vhodný. Proto se fuzzy analýza provádí častěji s využitím procedur α-řezů a α-diskretizace fuzzy množin (tento postup bude popsán v dalším příspěvku časopisu EMI).

7 Numerický příklad

Jako numerický příklad výpočtu fuzzy funkce s aplikací principu rozšíření uveďme vztah pro výpočet globálního fuzzy výstupu $\tilde{y}$ variantního Takagi-Sugeno fuzzy nelineárního regresního modelu [7]

$$\tilde{y} = \frac{\sum_{r=1}^{2} w_r \, \underline{\tilde{y}_r}}{\sum_{r=1}^{2} w_r} = \frac{w_1 \tilde{y}_1 + \mathrm{w}_2 \tilde{y}_2}{w_1 + \mathrm{w}_2} \tag{22}$$

používaného pro abstraktní modelování nelineárních vícerozměrných složitých soustav. Vztah (22) je váženým součtem fuzzy výstupů $\tilde{y}_1$ a $\tilde{y}_2$ fuzzy regresních rovnic

$$\tilde{y}_1 = \tilde{f}_1(\underline{\tilde{k}}_1, \underline{x}) = \tilde{f}_1(\tilde{k}_{11}, \tilde{k}_{12}, \tilde{k}_{13}, x_1, x_2, x_3) = \tilde{k}_{11}x_1 + \tilde{k}_{12}x_2 + \tilde{k}_{13}x_3 \tag{23}$$

$$\tilde{y}_2 = \tilde{f}_2(\underline{\tilde{k}}_2, \underline{x}) = \tilde{f}_2(\tilde{k}_{21}, \tilde{k}_{22}, \tilde{k}_{23}, x_1, x_2, x_3) = \tilde{k}_{21}x_1 + \tilde{k}_{22}x_2 + \tilde{k}_{23}x_3 \tag{24}$$

Vztah (22) odpovídá fuzzy modelu typu (11). Váhové koeficienty ve vztahu (22) jsou reálná čísla $w_i \in \langle 0{,}1 \rangle$. Fuzzy regresní koeficienty $\underline{\tilde{k}}$ ve vztazích (23) a (24) jsou definovány jako fuzzy čísla $\underline{\tilde{K}}$ s trojúhelníkovými funkcemi příslušnosti (Obrázek 1) s body zlomu

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{11} &\rightarrow \tilde{K}_{11}[1.60, 2.00, 2.40] \\
\tilde{k}_{12} &\rightarrow \tilde{K}_{12}[1.35, 1.50, 1.65] \\
\tilde{k}_{13} &\rightarrow \tilde{K}_{13}[3.00, 4.00, 5.00] \\
\tilde{k}_{21} &\rightarrow \tilde{K}_{21}[0.40, 0.50, 0.60] \\
\tilde{k}_{22} &\rightarrow \tilde{K}_{22}[2.50, 3.00, 3.50] \\
\tilde{k}_{23} &\rightarrow \tilde{K}_{23}[0.70, 0.80, 0.90]
\end{aligned} \tag{25}$$

Pro numerický výpočet funkcí (22), (23) a (24) zvolíme tyto hodnoty vstupních proměnných:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 3.25 \\
x_2 &= 5.41 \\
x_3 &= 2.22 \\
w_1 &= 0{,}35 \\
w_2 &= 1{,}15
\end{aligned}$$

Pro výpočet tvaru funkce příslušnosti $\mu_{\tilde{Y}}(y)$ výstupní globální hodnoty $\tilde{y}$ použijeme principu rozšíření (17). Výsledkem výpočtu vztahů (23) a (24) jsou pak fuzzy čísla

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_1 &\rightarrow \tilde{Y}_1[20.12, 22.47, 24.83] \\
\tilde{y}_2 &\rightarrow \tilde{Y}_2[16.37, 19.63, 22{,}88]
\end{aligned}$$

a globálním výstupem vztahu (22) je pak fuzzy číslo

$$\tilde{y} \rightarrow \tilde{Y}[17.82, 20.72, 23.63] \tag{26}$$

Jelikož fuzzy funkce (22) využívá pouze lineární operace a funkce příslušnosti fuzzy čísel $\underline{\tilde{K}}$ jsou trojúhelníkové (25), je výstupní fuzzy množina $\tilde{Y}$ rovněž trojúhelníkové fuzzy číslo.

Hodnota *y* = 20.72 nosiče fuzzy čísla (26) je vlastně výsledek výpočtu obyčejného fundamentálního vztahu odpovídajícího fuzzy funkci (22), jehož regresní koeficienty $\underline{k}$ jsou obyčejná čísla rovnající se ve fuzzy množinách (25) hodnotám nosičů s jednotkovým stupněm příslušnosti. Velikost intervalu $\langle 17.82, 23.63 \rangle$ potom stanoví neurčitost hodnoty *y* = 20.72, která může hrát v rozhodovacím procesu důležitou roli při posuzování užitné hodnoty (rizika) použití tohoto výsledku.

8 Diskuze

Fuzzifikace obyčejné analytické funkce (fundamentálního vztahu) umožňuje získat výpočtem nejen číselný výsledek, ale i kvantifikovanou neurčitost, která jej provází. Příčinou této neurčitosti je ne zcela přesná (vágní) definice vztahů, které mezi proměnnými takové neurčité funkce platí. Fuzzy funkce, které představují abstraktní modely složitých soustav a soustav, které zahrnují lidský faktor, jsou pro oblast společenských věd typické.

Proměnnými a/nebo parametry fuzzy funkcí jsou obecně fuzzy čísla. Aritmetické operace s fuzzy čísly nezbytné k výpočtu výstupních fuzzy proměnných funkce (fuzzy analýza) využívají Zadehova principu rozšíření. Jako ilustrace fuzzy analýzy je uveden příklad řešení jednoduché lineární vícerozměrné fuzzy funkce.

Informace o míře neurčitosti výsledků pak může být důležitým vodítkem v procesu rozhodování o přijetí finálního řešení. Nalezené optimální řešení rozhodovací úlohy zahrnující neurčitost nemusí být pro rozhodovatele nejvhodnější právě z hlediska jeho určitosti. Může nastat situace, kdy nalezené optimální řešení je natolik neurčité a nejasné, že rozhodovateli neposkytuje v rozhodovacím procesu plnohodnotné podklady. Naproti tomu ale lze vybrat takové řešení, jež není pro řešenou rozhodovací úlohu optimální, ale je méně neurčité, tedy jasnější, spolehlivější, méně rizikové.

Poděkování
Tento příspěvek vznikl s finanční podporou a v rámci řešení projektu GAČR P403/12/1811: Vývoj nekonvenčních modelů manažerského rozhodování v podnikové ekonomice a veřejné ekonomii.

9 Literatura

[1] LIKEŠ,Jiří, MACHEK,Josef. *Matematická statistika*. SNTL Praha, 1988 (bez ISBN)
[2] HANOUSEK,Jan, CHARAMZA, Pavel. *Moderní metody zpracování dat.* EDUCE´99. ISBN 80-85623-31-5
[3] MAŘÍK,Vladimír. *Umělá inteligence (2),* ACADEMIA Praha, 1997, ISBN 80-200-0504-8
[4] OLEJ,Vladimír, OBRŠÁLOVÁ,Ilona, KŘUPKA,Jiří. *Modelling of Selected Areas of Suitainable Development by Artificial Intelligence and Soft Computing.* GRADA 2009. ISBN 978-80-247-3167-4
[5] ZADEH, Lofti Asker. Fuzzy sets, *Information & Control* 8(1965), 338-353 (bez ISSN).
[6] CELIKZILMAZ,Asli, TURKSEN,Burkhan. *Modelling Uncertainty with Fuzzy Logic.* Springer-Verlag. 2009. ISBN 978-3-540-89923-5.
[7] NOVÁK,Vilém. *Základy fuzzy modelování.* BEN Praha, 2000, ISBN 80-7300-009-1
[8] NOVÁK,Vilém. *Fuzzy množiny a jejich aplikace*. SNTL Praha. 1990. ISBN 80-03-00325-3.
[9] MÖLLER,Bernd., BEER,Michael. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer. 2004, ISBN 3-540-40294-2
[10] POKORNÝ,Miroslav. *Fuzzy nelineární regresní analýza.* Doktorská dizertační práce, VUT Brno, Fakulta elektrotechnická, Brno, 1993 (bez ISBN)