FUZZY STOCHASTICKÁ ANALÝZA SLOŽITÝCH SOUSTAV ČÁST I – FUZZY NEURČITOST NÁHODNÉ VELIČINY

FUZZY STOCHASTIC ANALYSIS OF COMPLEX SYSTEMS PART I – FUZZY UNCERTAINTY OF RANDOM VARIABLE

Miroslav Pokorný, Zdeňka Krišová

Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., Ústav informatiky,
miroslav.pokorny@mvso.cz, zdenka.krisova@mvso.cz

***Abstrakt**:*
Pravděpodobnostní metody jsou schopny reflektovat pouze neurčitost typu stochastičnost. Nepřesná, nespolehlivá data, neurčitosti, které nemohou být popsány statisticky, mohou být vzaty v úvahu pouze přibližně. Z toho plyne, že konvenční metody statistické analýzy mohou být použity pouze v omezeném rozsahu. V praxi je však třeba uvažovat i takové fuzzy proměnné, které jsou ovlivňovány náhodnými vlivy. Fuzzy náhodné veličiny sice částečně vykazují stochastický charakter, nemohou však být bez jakýchkoliv pochyb zpracovány metodami čistě statistickými, neboť jejich náhodnost je doprovázena a narušena fuzzitivitou. Příspěvek uvádí definici a postup zjištění funkčních i číselných parametrů fuzzy náhodné proměnné. Je určen k prohloubení znalostí odborné komunity oborů společenských věd v oblasti metod zpracování a využití neurčitosti.

Abstract:
Probabilistic methods are able to reflect the only type of uncertainty - randomness. Inaccurate, unreliable data, the uncertainty that can not be described statistically, may be taken into account only approximately. This implies that conventional methods of statistical analysis can be used only to a limited extent. In practice, however, have to be considered some fuzzy variables that are additionaly influenced by stochastic effects. Fuzzy stochastic variables, while partially stochastic nature of the show, but can not be processed without any doubt using only purely statistical methods, since their randomness is accompanied and impaired by fuzzitiveness. The paper presents definition and determination of functional and numerical parameter of fuzzy stochastic variable. It is aimed to enhance professional knowledge of the social sciences community in the methods of uncertainty processing and exploitation.

Klíčová slova:
stochastičnost, fuzzitivita, fuzzy proměnná, fuzzy náhodná veličina, fuzzy distribuční funkce, fuzzy funkce rozložení hustoty pravděpodobnosti, fuzzy číselné charakteristiky

Key words:
randomness, fuzzitivity, fuzzy variable, fuzzy stochastic variable, fuzzy probability distribution function, fuzzy probability density function, fuzzy numerical characteristics,

1 ÚVOD

Uvažování neurčitostí, týkajících se měřených dat i reálných soustav, jsou důležitým předpokladem pro korektnost výsledků konstrukce abstraktních modelů soustav i výsledků jejich simulací.

Konvenční matematické metody pro zpracování neurčitých veličin vycházejí z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky a vedou cestami pravděpodobnostní analýzy [1]. Koncept pravděpodobnostní analýzy vlastností soustav vychází z metod zpracování informací, které se obecně dělí na dva základní typy [2]

- informace o vzájemných vztazích vstupních a výstupních náhodných veličin
- informace o rozdělení hustoty pravděpodobnosti vstupních náhodných veličin.

Informace prvního typu se vztahují k neurčitostem, kterými je zatížen abstraktní model vyšetřované soustavy. O velikosti parametrů modelu máme často k dispozici jen neúplné informace, které nám umožňují formalizovat neurčité parametry jako fuzzy čísla. Transformační vztah mezi vstupními a výstupními veličinami je pak nutno formalizovat jako fuzzy funkci. Základem syntézy modelů takových soustav je teorie fuzzy množinové matematiky [5].

Informace druhého typu se vztahují k neurčitostem, které provázejí hodnoty vstupních proměnných abstraktního modelu. Pokud jsou splněny všechny podmínky, které teorie matematické statistiky klade pro získání informací o vstupní veličině jako náhodné (stochastické), pak je pro korektní stanovení jejích charakteristik (středních hodnoty, rozptyly, kvantily a funkce rozložení hustoty pravděpodobnosti) možno použít konvenční pravděpodobnostní metody. Kvalita vstupních informací musí být statisticky zajištěna dodržením řady předpokladů o vlastnostech výběrových souborů [1].

V praxi se velmi často ale stává, že máme o měřené náhodné veličině jen informace ne zcela přesné a neúplné. Zjednodušeně lze pak každé měření chápat jako realizaci náhodné veličiny, která je zatížena vědomostní (fuzzy) neurčitostí plynoucí z neznalosti konkrétních podmínek experimentu, malého počtu vzorků nebo malé vypovídací schopnost použitých metod měření. V takových případech je třeba uvažovat měřenou veličinu jako fuzzy náhodnou, vytvořit její matematický popis, metodu a počítačové programy pro její využití v proceduře fuzzy stochastické analýzy .

2 PRAVDĚPODOBNOST A FUZZY NEURČITOST

Pravděpodobnostní metody jsou schopny reflektovat pouze neurčitost typu stochastičnost. Nepřesná, nespolehlivá data, neurčitosti, které nemohou být popsány nebo jsou nedostatečně popsány statisticky, mohou být vzaty v úvahu pouze přibližně. Z toho plyne, že konvenční metody statistické analýzy mohou být použity pouze v omezeném rozsahu.

[1] BUDÍKOVÁ,M. *Průvodce základními statistickými metodami.* GRADA Publishing, a.s. 2010. ISBN:978-80-247-3243-5
[2] KALA,Z. *Fuzzy Stochastic Analysis of Structural Reliability.* Technické listy 2009. 2.5.2.2-44.CIDEAS Brno. 2009
[5] NOVÁK,V. *Základy fuzzy modelování.* BEN Praha, 2000, ISBN 80-7300-009-1

V praxi je však třeba uvažovat i takové fuzzy proměnné, které jsou ovlivňovány stochastickými vlivy. Nelze je pak formalizovat ani výlučně s využitím fuzzy přístupů, ani výlučně s využití přístupů stochastických. V takových případech je třeba použít přístupu integrovaného – fuzzy stochastického – a formalizovat proměnné fuzzy náhodné. Fuzzy náhodné veličiny sice částečně vykazují stochastický charakter, nemohou však být bez jakýchkoliv pochyb zpracovány metodami čistě statistickými, neboť jejich stochastičnost je doprovázena a narušena fuzzitivitou. Fuzzy náhodnou veličinu lze chápat jako [1] náhodnou veličinu, která byla měřena za neurčitých podmínek, tj. pokud nebylo uskutečněno pozorování s exaktně definovanými podmínkami experimentů.

Pro odhady charakteristik takových fuzzy náhodných veličin lze použít statistických metod, které jsou ale rozšířeny zahrnutím neurčitosti (fuzzitivnosti) náhodných dat.

Klasifikace a popis neurčitostí může být provedeno z hlediska různých kritérií. Podle typu neurčitosti definujeme v tomto příspěvku jejich tři kategorie, které mají v kontextu abstraktního modelování a vyšetřování chování složitých reálných soustav největší praktický význam [7]:

a) stochastická neurčitost - je vlastnost výsledků náhodných pokusů prováděných za reprodukovatelných podmínek dostatečně dlouho, může být formalizována deterministicky

b) neformální neurčitost - je důsledkem nedostatku informací. Projevuje se v případě malých datových souborů, libovolně fluktujících podmínek experimentů nebo v případech nedostatečného popisu systému

c) slovní neurčitost (vágnost) - je spojena s jazykovou kvantifikací velikosti proměnných. Aby bylo možno zahrnout vágnost do výpočtových procedur, je třeba ji formalizovat numericky.

Charakter těchto typů neurčitosti je koncipován v kontextu jednotlivých kategorií a jejich kombinací (integrací) jako stochastičnost (nahodilost, náhodnost), fuzzitivita (vágnost) a fuzzy stochastičnost (jako kombinace obou předchozích formalizací).

a) stochastičnost je popisována a vyhodnocována metodami matematické teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky. Využívá jejich zákonů a pracuje pouze s objektivními informacemi (naměřenými numerickými daty). Subjektivní informace nejsou akceptovány.

b) fuzzitivita je výsledkem informační nedostatečnosti a slovní neurčitosti (vágnosti slov přirozeného jazyka). Je neurčitostí slovních popisů chování soustav a proměnných. K formalizaci vágnosti využívá přístupů fuzzy množinové matematiky. Využívá hlavně subjektivních, méně objektivních informací [3], [4]..

c) fuzzy stochastičnost provází situace, kdy náhodný fenomén nesplňuje striktně podmínky a předpoklady stochastické neurčitosti - stochastické vlastnosti vykazuje pouze částečně. Je typická v případech, kdy podmínky experimentů vykazují vlastnosti neformální nebo jazykové neurčitosti nebo rozsah výběrového souboru je prokazatelně nedostatečný. Zpracování fuzzy stochastické neurčitosti využívá přístupů teorie fuzzy náhodných veličin. Využívá objektivních i subjektivních informací.

[3] POKORNÝ,M. *Fuzzy analýza složitých neurčitých soustav I.* Sborník odborných prací Ekonomika-Management-Inovace. MVŠO Olomouc. ISSN
[4] POKORNÝ,M. *Fuzzy analýza složitých neurčitých soustav II.* Sborník odborných prací Ekonoimka-Management-Inovace. MVŠO Olomouc. ISSN
[7] MÖLLER,B. *Fuzzy Randomness – A Contribution to Imprecise Probability.* ZAMM – Z Agnew. Match. Mech.84. No.10-14. Str.754-764.WILLEY-VCH. 2004

Souborně můžeme říci, že existence fuzzy stochastičnosti může být opodstatněna v praktických případech, kdy

- rozsah výběrových souborů je malý s absencí dodatečných apriorních informací o statistických vlastnostech měřené veličiny
- statistická data mají vlastnost fuzzitivity, tj. mají pochybnou přesnost
- statistická data byla získána v neurčitých, nedefinovaných nebo nereprodukovaných podmínkách.

3 OVĚŘOVÁNÍ VÁGNOSTI STATISTICKÉHO SOUBORU

Informace a výsledky, plynoucí ze statistických analýz, mohou být do značné míry znehodnoceny vlivem nezanedbatelné vágní určitosti vstupních veličin a výpočtových modelů. Je třeba rozhodnout, od kterého okamžiku je nutno ve statistické analýze připustit a kvantifikovat i vliv subjektivní (vágní, fuzzy) neurčitosti.

Pro vyjádření stupně vágnosti náhodné veličiny je možno použít neparametrické testy statistických hypotéz o vlastnostech a parametrech výběrového souboru [1]:

a) test náhodnosti souboru - nulová hypotéza H_0 : „Prvky souboru jsou náhodné“

b) test homogenity souboru – test souboru s prvky (a – d) s nulovou hypotézou H_0: „Výběrový soubor je složen ze dvou podsouborů (a – b) a (c – d), pocházejících ze stejného rozložení“

c) test typu rozložení souboru Kolmogorov-Smirnovův - typ distribuční funkce souboru je odhadován pomocí neparametrického testu dobré shody Kolmogorov-Smirnovova. Pokud typ rozdělení souboru jednoznačně odhadnout nelze, statistický předpoklad identické a nezávislé distribuce výběrového souboru proto splněn.

Testy statistických hypotéz umožňují potvrzení nebo zamítnutí předpokladu o stochastickém charakteru výběrového souboru. Pokud výběrový soubor nevykazuje v dostatečné míře vlastnosti své stochastičnosti, je k jeho analýze nutno použít přístupů fuzzy stochastických.

4 FUZZY NÁHODNÁ VELIČINA

Fuzzy náhodná veličina je reprezentována náhodnými daty, která jsou nositelem doplňkové neurčitosti – fuzzitivity [6].

Uvažujme prostor Ω náhodných jevů ω. Označme fuzzy realizací *n*- rozměrné fuzzy náhodné veličiny $\underline{\widetilde{X}}$ *n*-tici fuzzy čísel $\widetilde{x}_{1,}\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_n$

$$\widetilde{x}(\omega) = (\widetilde{x}_{1,}\widetilde{x}_2,...,\widetilde{x}_n) \subseteq \underline{X}\,, \quad \omega \in \Omega \tag{1}$$

[1] BUDÍKOVÁ,M. *Průvodce základními statistickými metodami.* GRADA Publishing, a.s. 2010. ISBN:978-80-247-3243-5
[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

Každé fuzzy číslo $\widetilde{x}_i$ je definováno jako konvexní normální fuzzy množina [5]

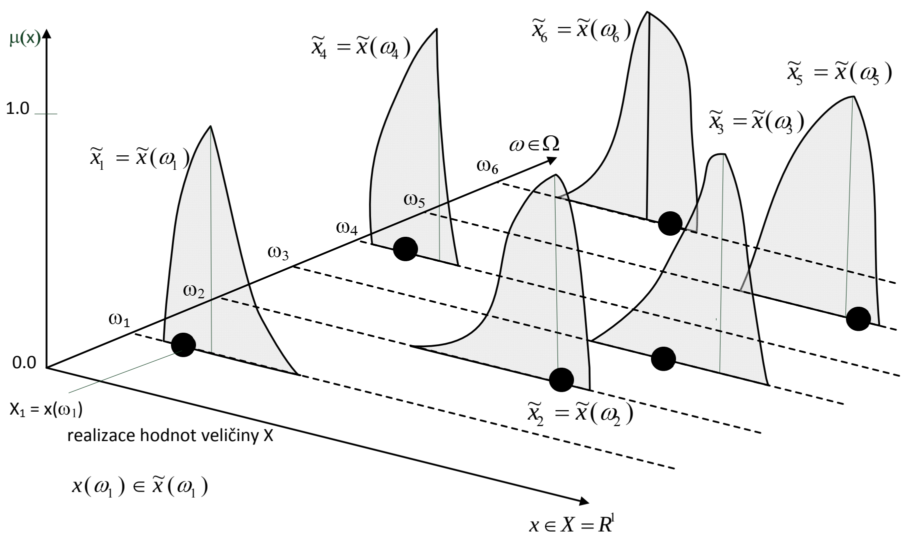
$$\widetilde{x}_i = \{x; \mu_{\widetilde{x}_i}(x) \mid x \in X\} \qquad (2)$$

kde funkce příslušnosti $\mu_{\widetilde{x}_i}(x)$ je funkce příslušnosti fuzzy čísla $\widetilde{x}_i$ alespoň po částech spojitá.

Fuzzy náhodná veličina (nebo fuzzy náhodný vektor) $\underline{\widetilde{X}}$ je definována jako fuzzy výsledek neurčitého mapování

$$\underline{\widetilde{X}} : \quad \Omega \to F(R^n) \qquad (3)$$

kde $F(R^n)$ je množina všech (normálních) fuzzy čísel v R^n. Vztahem (3) je definován vektor, jehož prvky mají vlastnost fuzzy stochastičnosti.



Obr.1 Realizace obyčejné jednorozměrné fuzzy náhodné veličiny *X* fuzzy čísly $x(\omega_i) \in \widetilde{x}(\omega_i)$ [6] (upraveno)

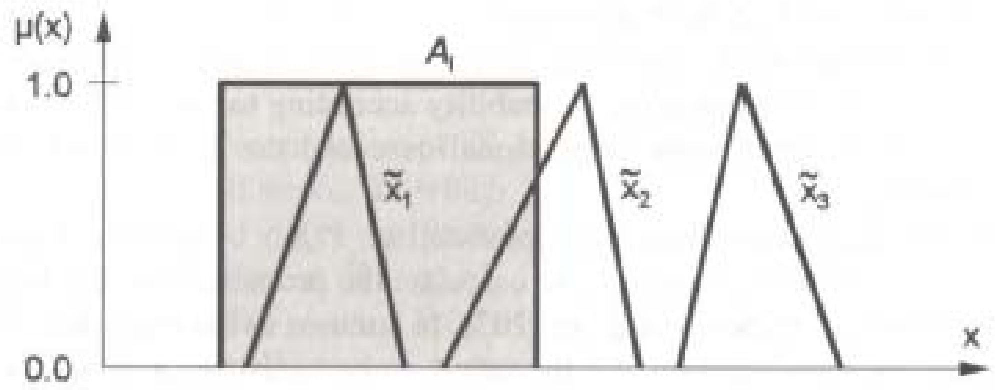
Lze napsat, že $\underline{x}$ je prvkem $\underline{X}_j$ fuzzy náhodného vektoru $\underline{\widetilde{X}}$. To znamená, že fuzzy náhodný vektor $\underline{\widetilde{X}}$ je fuzzy množina všech možných prvků $\underline{X}_j$ obsažených v $\underline{\widetilde{X}}$. Fuzzy náhodný vektor přitom může být spojitý nebo diskrétní. Realizace reálné náhodné proměnné X reprezentující prvek X_j náležející do $\widetilde{X}$ jsou na Obr.1 znázorněny černými body.

[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

Jelikož každá realizace $\underline{\tilde{x}}$ fuzzy náhodného vektoru $\underline{\tilde{X}}$ je fuzzy číslo, speciální případ reálného náhodného vektoru je jednoznačně definován středními hodnotami realizací $\underline{\tilde{x}}$ (se stupněm příslušnosti μ = 1). Proto je možné uvažovat náhodné vektory a fuzzy náhodné vektory současně.

4.1 Pravděpodobnost fuzzy náhodné veličiny

Uvažujme realizace $\tilde{x}_i$ jednorozměrné fuzzy náhodné veličiny $\tilde{X}$ jako fuzzy čísla. Uvažujme obyčejnou množinu A takovou, že $\tilde{X} \in A$. Situace je nakreslena na Obr.2



Obr.2 Realizace $\tilde{x}_i$ jednorozměrné fuzzy náhodné veličiny $\tilde{X}$ [6]

Hledejme pravděpodobnost $P(\tilde{X} \in A)$ takovou, že hodnota fuzzy náhodné proměnné $\tilde{X}$ padne do množiny A, $\tilde{X} \in A$. Vzhledem ke vztahu $\tilde{X}$ a A můžeme uvažovat tři případy:

a) fuzzy realizace $\tilde{x}_1$ leží úplně uvnitř množiny *A*
b) fuzzy realizace $\tilde{x}_2$ leží částečně uvnitř *A*
c) fuzzy realizace $\tilde{x}_3$ leži zcela mimo *A*.

Z toho plyne, že pravděpodobnost

$$P(\tilde{X} \in A)$$

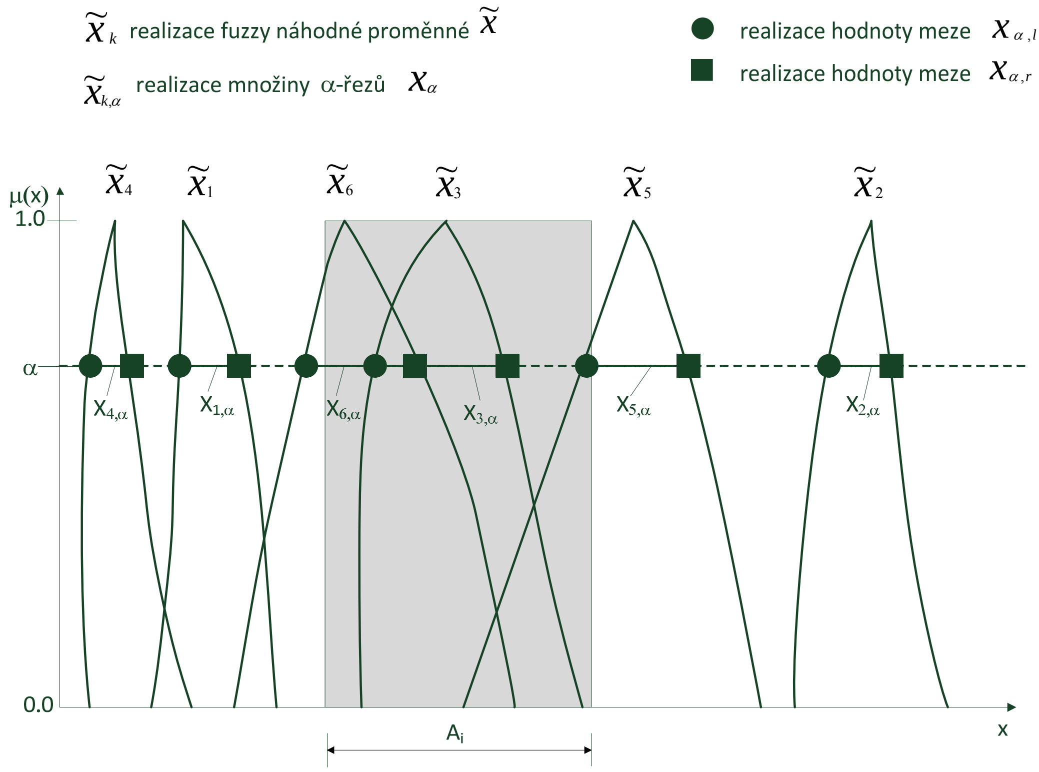
nemůže být reprezentována ostrým číslem, nýbrž fuzzy množinou s funkcí příslušnosti

$$\mu(P(\tilde{X} \in A))$$

která zohledňuje neen plnou, nýbrž i možnou částečnou příslušnost $\tilde{X} \in A$.

[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

Výpočet tvaru fuzzy pravděpodobnosti $\tilde{P}(A_i)$ je provedena metodou α-řezů fuzzy množin realizací $\tilde{x}_i$ a její α-diskretizace. Procedura α - diskretizace realizací $\tilde{x}_i$ a množiny A_i je uvedena na Obr.3.



Obr.3 Procedura α - diskretizace realizací $\tilde{x}_i$ a množiny A_i [6] (upraveno)

Procedurou α-diskretizace obdržíme ostrou náhodnou množinu α-řezů $\underline{X}_\alpha$

$$\underline{X}_\alpha = \{x = x_j \mid \mu(x_j) \geq \alpha\} \tag{4}$$

V jednorozměrném případě tak obdržíme pro každý α-řez náhodný interval $[X_{\alpha,l}, X_{\alpha,r}]$.

Funkci příslušnosti $\mu(\tilde{P}(A_i))$ sestrojíme z jejích α-řezů $\underline{X}_\alpha$

$$\tilde{P}(A_i) = \{(P_\alpha(A_i), \mu(P_\alpha(A_i)) \mid P_\alpha(A_i) = [P_{\alpha,l}(A_i), P_{\alpha,r}(A_i)]; \\ \mu(P_\alpha(A_i)) = \alpha \forall \alpha \in (0,1]\} \tag{5}$$

Pro jednorozměrnou množinu A_i

$$A_i = \{x \mid x \in X; x_1 \leq x \leq x_2\} \tag{6}$$

[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

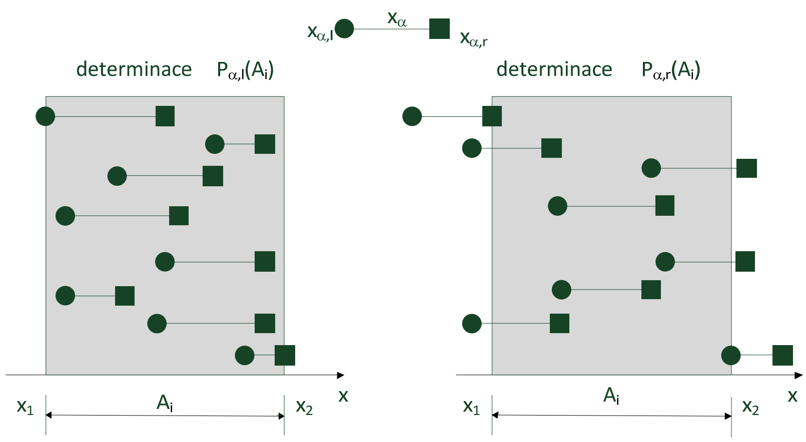
platí

$$P_{\alpha,l}(A_i) = \max[0;\ P(X_{\alpha,r} = t_r \mid x_2, t_r \in X; t_r \langle x_2) - P(X_{\alpha,l} = t_l \mid x_1, t_l \in X; t_l \langle x_1)]$$

(7)

$$P_{\alpha,r}(A_i) = P(X_{\alpha,l} = t_l \mid x_2, t_l \in X; t_l \langle x_2) - P(X_{\alpha,r} = t_r \mid x_1, t_r \in X; t_r \langle x_1)$$

Situace je uvedena na Obr.4



Obr.4 Realizace množiny α- řezů [6] (upraveno)

. Pro reálnou náhodnou proměnnou $X = X_{\alpha,l} = X_{\alpha,r}$ platí vztah

$$P_{\alpha,l}(A_i) = P_{\alpha,r}(A_i) = P(X = t \mid x_1, x_2, t \in X; x_1 \le t \le x_2) \tag{8}$$

Pro jednorozměrný případ platí v (6) substituce $x_i = x_1 = x_2$ což vede ke vztahu

$$P_{\alpha,l}(x_i) = P(X_{\alpha,l} = X_{\alpha,r} = t \mid x_i, t \in X; t = x_i) \tag{9}$$

a

$$P_{\alpha,r}(x_i) = P(X_{\alpha.l} = t_l \mid x_i, t_l \in X; t_l \le x_i) - P(X_{\alpha.r} = t_r \mid x_i, t_r \in X; t_r < x_i) \tag{10}$$

5 FUNKČNÍ CHARAKTERISTIKY FUZZY NÁHODNÉ VELIČINY

Označme fuzzy distribuční funkci vícerozměrné fuzzy náhodné veličiny $\underline{\tilde{X}}$ symbolem $\tilde{F}(\underline{x})$. Pomocí α- řezů [3], [4] můžeme funkci $\tilde{F}(\underline{x})$ vyjádřit jako [7]

[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2
[7] MÖLLER,B. *Fuzzy Randomness – A Contribution to Imprecise Probability.* ZAMM – Z Agnew. Match. Mech.84. No.10-14. Str.754-764.WILLEY-VCH. 2004

$$\widetilde{F}(\underline{x}) = \left\{F_\alpha(\underline{x}); \mu(\mathrm{F}_\alpha(\underline{x})) \middle| F_\alpha(\underline{x}) = \left[F_{\alpha l}(\underline{x}); \mathrm{F}_{\alpha r}(\underline{x})\right]; \mu(\mathrm{F}_\alpha(\underline{x})) = \alpha, \forall \alpha \in (0;1>\right\} \tag{11}$$

Funkce $\widetilde{F}(x)$ pro jednorozměrnou fuzzy náhodnou veličinu $\widetilde{X}$ nakreslena v pravé části Obr. 5. Její funkční hodnoty jsou fuzzy čísla. Šířka (shadow) intervalu

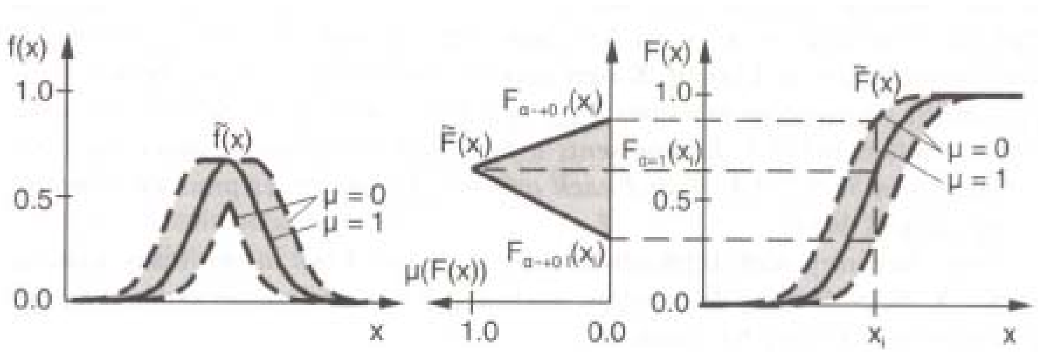
$$\widetilde{F}_s(x) = F_{\alpha=0,\mathrm{r}}(x) - F_{\alpha=0,\mathrm{l}}(x) \tag{12}$$

je stupněm fuzzitivity (vágnosti) fuzzy náhodné veličiny $\widetilde{X}$. Jestliže $\widetilde{F}_s(x)$ = 0, fuzzy náhodná veličina se stává náhodnou veličinou obyčejnou. Fuzzy náhodnou veličinu tak můžeme chápat jako zobecnění, které zahrnuje obyčejnou náhodnou veličinu a fuzzy veličinu jako speciální případy (Obr.6).

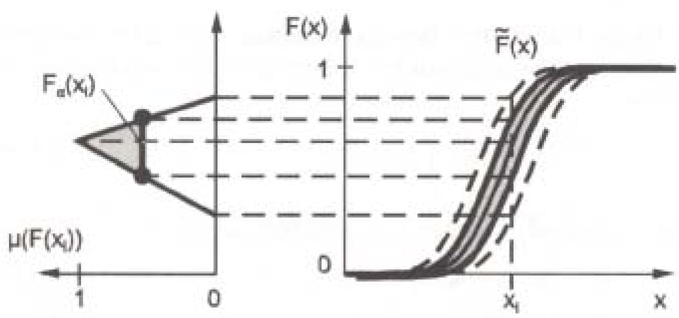
Fuzzy funkci rozložení hustoty pravděpodobnosti vícerozměrné fuzzy náhodné veličiny $\underline{\widetilde{X}}$ označíme $\widetilde{f}(\underline{x})$ která je pro spojitou náhodou veličinu $\underline{\widetilde{X}}$ vázána s funkcí $\widetilde{F}(\underline{x})$ analytickým vztahem. Pro $\underline{x} = \{x_1, ..., x_n\}$ platí pro každé *j* = 1,….,n

$$F_j(\underline{x}) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_j(x)dx \tag{13}$$

Funkce fuzzy rozložení hustoty pravděpodobnosti pro jednorozměrnou fuzzy náhodnou veličinu $\widetilde{X}$ je nakreslena v levé části obrázku Obr.5.



Obr.5 Fuzzy distribuční funkce a fuzzy funkce rozložení hustoty pravděpodobnosti [7]



Obr.6 Shadow interval fuzzy distribuční funkce [7]

[7] MÖLLER,B. *Fuzzy Randomness – A Contribution to Imprecise Probability.* ZAMM – Z Agnew. Match. Mech.84. No.10-14. Str.754-764.WILLEY-VCH. 2004

V případě fuzzy náhodné veličiny nemusí pocházet všechny prvky výběrového souboru ze stejného rozložení. V takových případech jsou funkce kompaundní - složené z *n*- distribucí dílčích $f_i(x)$ s váhovými funkcemi $g_i(x)$.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} g(x).f_i(x) \tag{14}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} g_i(x).f_i(x) \right) dx = \int_{-\infty}^{n} f(x)dx \tag{15}$$

Pro stanovení váhových funkcí $g_i(x)$ musí platit podmínka jejich integrovatelnosti, přičemž kompaundní distribuce splňuje podmínky

$$f(x) \geq 0\,; \quad \forall x \in X \tag{16}$$

$$\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x)d(x) = 1 \tag{17}$$

Jelikož všechny hodnoty *x* jsou fuzzy čísla, jsou váhové funkce $g_i(x)$ fuzzy funkcemi $\widetilde{g}_i(x)$ a vztahy pro výpočet fuzzy-stochastických charakteristik získají tvar

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}(x).f_i(x) \tag{18}$$

$$\widetilde{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}_i(x).f_i(x) \right) dx = \int_{-\infty}^{n} \widetilde{f}(x)dx \tag{19}$$

Jako příklad uvažujme kompaundní distribuci složenou z normální distribuce $f_1(x)$ s $m_{x1} = 6.8$ a $\sigma_{x1} = 1.1$ a logaritmicko-normální distribuce $f_2(x)$ s $m_{x2} = 5.5$ a $\sigma_{x2} = 0.8$ a minimální hodnotou

$x_{02} = 2$ [7]. Váhové funkce jsou reprezentovány fuzzy čísly $\widetilde{a}$ a $\vec{b}$, takže platí

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{i=1}^{2} \widetilde{g}(x).f_i(x)' = \widetilde{a}.f_1(x) + \widetilde{b}.f_2(x) \tag{20}$$

$$\widetilde{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}_i(x).f_i(x) \right) dx = \int_{-\infty}^{n} \widetilde{a}.f_1(x) + \widetilde{b}.f_2(x) = \widetilde{a}.F_1(x) + \widetilde{b}.F_2(x) \tag{21}$$

[7] MÖLLER,B. *Fuzzy Randomness – A Contribution to Imprecise Probability.* ZAMM – Z Agnew. Match. Mech.84. No.10-14. Str.754-764.WILLEY-VCH. 2004

Podle (17) musí platit

$$\vec{b} = 1 - \widetilde{a}$$

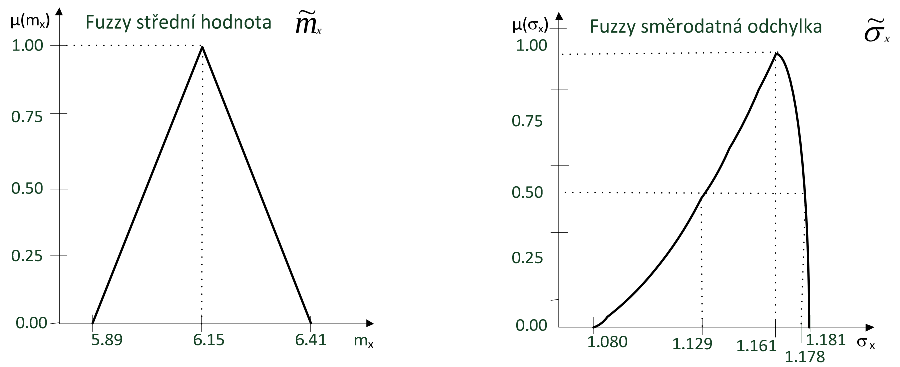
Pro volnou proměnnou ve tvaru fuzzy čísla $\widetilde{a} =$ <0.3, 0.5, 0.7> je splněna i podmínka (16). Pro fuzzy kompaundní distribuci je fuzzy střední hodnota rovna

$$\widetilde{m}_x = \widetilde{a}.m_{x1} + (1-\widetilde{a}).m_{x2} = <5.89, 6.15, 6.41> \qquad (22)$$

Fuzzy směrodatná odchylka fuzzy kompaundní distribuce je rovna

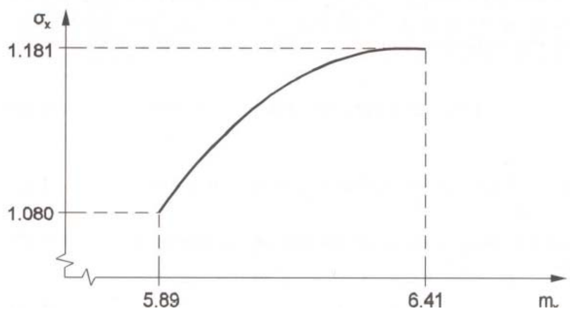
$$\widetilde{\sigma}_x = \sqrt{\widetilde{a}.\sigma_{x1}^2 + (1-\widetilde{a})\sigma_{x2}^2 + \widetilde{a}(1-\widetilde{a}).(m_{x1} - m_{x2})^2} \qquad (23)$$

Funkce příslušnosti fuzzy $\widetilde{m}_x$ je lineární a fuzzy čísla $\widetilde{\sigma}_x$ je nelineární – viz Obr.7



Obr.7 Fuzzy střední hodnota a fuzzy směrodatná odchylka [6] (upraveno)

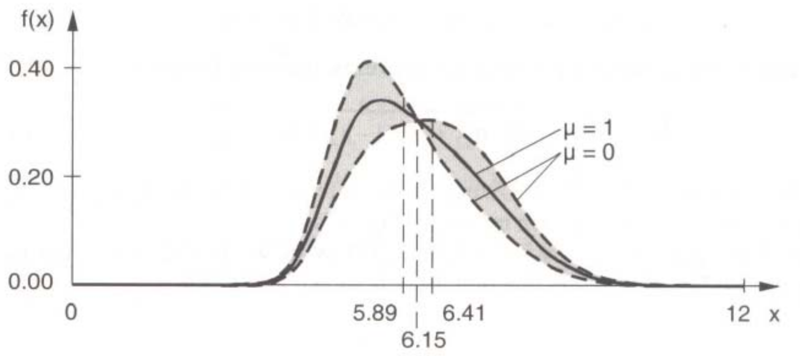
Závislost hodnot $\widetilde{m}_x$ a $\widetilde{\sigma}_x$, určující která hodnota σ_x odpovídá které hodnotě m_x, je uvedena na Obr.8



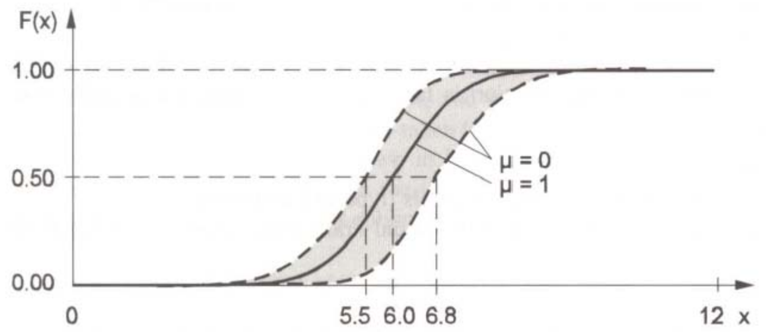
Obr.8 Vzájemná závislost hodnot $\widetilde{m}_x$ a $\widetilde{\sigma}_x$ [6]

[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

Odpovídající funkce $\widetilde{f}(x)$ a $\widetilde{F}(x)$ jsou uvedeny na Obr.9 a Obr.10



Obr.9 Kompaudní fuzzy funkce rozložení hustoty pravděpodobnosti [6]



Obr.10 Kompaudní fuzzy distribuční funkce [6]

6 ČISELNÉ PARAMETRY FUZZY NÁHODNÉ VELIČINY

Typ rozložení hustoty pravděpodobnosti a parametry fuzzy náhodné veličiny musí být stanoveny na základě analýzy výběrového souboru fuzzy náhodné veličiny $\underline{\widetilde{X}}$. V dalším textu budeme uvažovat jednorozměrnou fuzzy náhodnou veličinu $\widetilde{X}$. Uveďme vztahy pro parametry (momenty) její funkce rozložení hustoty pravděpodobnosti .

Obecný moment jednorozměrné fuzzy náhodné veličiny *k*- tého řádu je definován jako [6]

$$\widetilde{m}_{k,x} = E\widetilde{X}^k = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x^k . \widetilde{f}(x)dx \tag{24}$$

Pro *k* = 1 získáme vztah pro fuzzy střední hodnotu fuzzy náhodné veličiny $\widetilde{X}$ ve tvaru

$$\widetilde{m}_x = E\widetilde{X} = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x . \widetilde{f}(x)dx \tag{25}$$

[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

Centrální moment jednorozměrné fuzzy náhodné veličiny *k*- tého řádu je definován jako

$$\tilde{\zeta}_{k,x} = E(\tilde{X} - \tilde{m}_x)^k = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x - \tilde{\mathrm{m}}_{\mathrm{x}})^k . \tilde{f}(x) dx \tag{26}$$

Pro $k = 2$ získáme vztah pro fuzzy disperzi fuzzy náhodné veličiny $\tilde{X}$ ve tvaru

$$\tilde{\zeta}_{2,x} = D^2 \tilde{X} = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x - \tilde{\mathrm{m}}_{\mathrm{x}})^2 . \tilde{f}(x) dx \tag{27}$$

a fuzzy směrodatná odchylka fuzzy náhodné veličiny $\tilde{X}$ je dána vztahem

$$\tilde{\sigma}_x = \sqrt{D^2 \tilde{X}} = \sqrt{\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x - \tilde{\mathrm{m}}_{\mathrm{x}})^2 . \tilde{f}(x) dx} \, . \tag{28}$$

Numerický příklad.

Pokud jsou a-priori známy funkční parametry (fuzzy čísla střední hodnota $\tilde{m}_x$ a rozptyl $\tilde{\sigma}_x$) a typ rozdělení je jednotný pro všechny prvky výběrového souboru, vypočítáme fuzzy stochastické funkční charakteristiky z fuzzifikovaných funkčních vztahů pro příslušné rozdělení. Např. pro normální Gaussovo rozložení platí

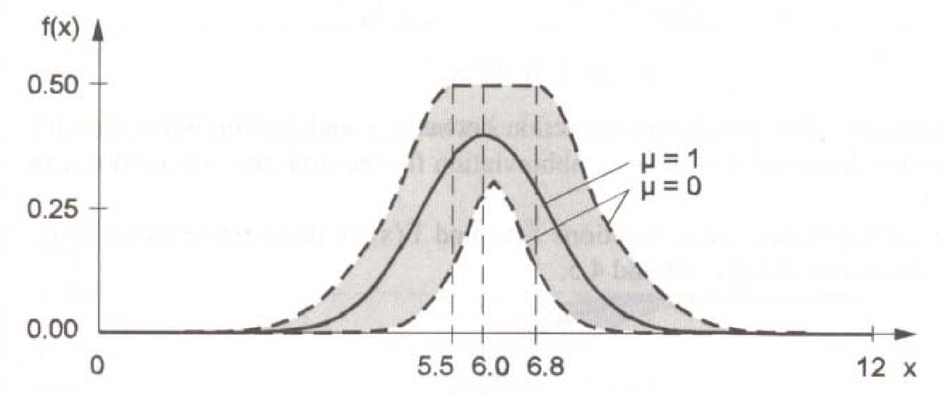
$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_x \sqrt{2\pi}} \exp - 0{,}5 \left(\frac{x - \tilde{m}_x}{\tilde{\sigma}_x} \right)^2 \tag{29}$$

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp - 0{,}5 \left(\frac{x - \tilde{m}_x}{\tilde{\sigma}_x} \right)^2 dx \tag{30}$$

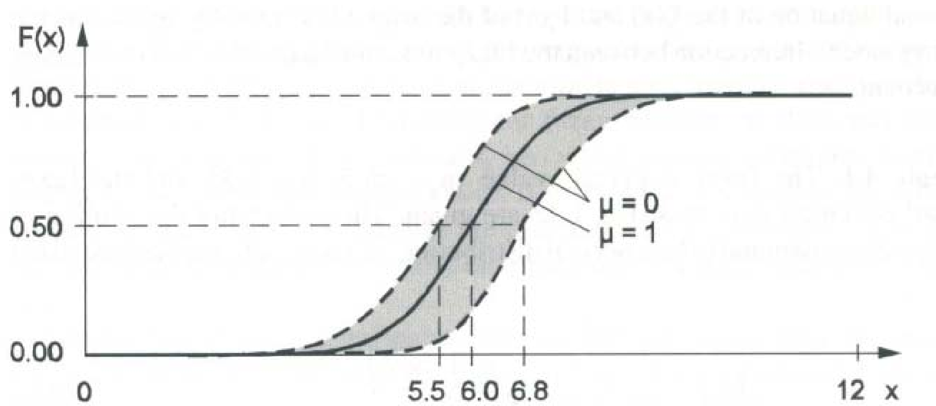
Pro aritmetické operace nutné k výpočtu těchto funkčních charakteristik je použita metoda principu rozšíření a α-řezů [3], [4].

Jako příklad uveďme výsledné průběhy fuzzy stochastických charakteristik pro $\tilde{m}_x$ = <5.5, 6.0, 6.8> a $\tilde{\sigma}_x$ =<0.8, 1.0, 1.1> uvedené na Obr.11 a Obr.12

[3] POKORNÝ,M. *Fuzzy analýza složitých neurčitých soustav I.* Sborník odborných prací Ekonomika-Management-Inovace. MVŠO Olomouc. ISSN
[4] POKORNÝ,M. *Fuzzy analýza složitých neurčitých soustav II.* Sborník odborných prací Ekonoimka-Management-Inovace. MVŠO



Obr.11 Fuzzy distribuční funkce typu Gaussova rozložení [6]



Obr.12 Fuzzy funkce rozložení hustoty pravděpodobnosti Gaussova typu [6]

7 DISKUZE A ZÁVĚR

V praxi je třeba uvažovat fuzzy proměnné veličiny, které jsou ovlivňovány stochastickými vlivy. Nelze je pak formalizovat ani výlučně s využitím fuzzy přístupů, ani výlučně s využití přístupů stochastických.

Statistické metody jsou schopny reflektovat pouze neurčitost typu stochastičnost. Nepřesná, nespolehlivá data, neurčitosti, které nemohou být popsány nebo jsou nedostatečně popsány statisticky, mohou být vzaty v úvahu pouze přibližně. Z toho plyne, že konvenční metody statistické analýzy mohou být použity pouze často pouze v omezeném rozsahu.

V řadě analýz praktických systémů z oblasti společenských věd je třeba použít přístupu integrovaného – fuzzy stochastického – a formalizovat proměnné fuzzy náhodné. Fuzzy náhodné veličiny sice částečně vykazují stochastický charakter, nemohou však být bez jakýchkoliv pochyb zpracovány metodami čistě statistickými, neboť jejich stochastičnost je doprovázena a narušena

[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2

fuzzitivitou. Fuzzy náhodnou veličinu lze chápat jako náhodnou veličinu, která byla měřena za neurčitých podmínek, tj. pokud nebylo uskutečněno pozorování s exaktně definovanými podmínkami experimentů.

Pro odhady charakteristik takových fuzzy náhodných veličin lze použít statistických metod, které jsou ale rozšířeny zahrnutím neurčitosti (fuzzitivnosti) náhodných dat.

Fuzzy stochastičnost provází situace, kdy náhodný fenomén nesplňuje striktně podmínky a předpoklady stochastické neurčitosti - stochastické vlastnosti vykazuje pouze částečně. Je typická v případech, kdy podmínky experimentů vykazují vlastnosti neformální nebo jazykové neurčitosti nebo rozsah výběrového souboru je prokazatelně nedostatečný. Zpracování fuzzy stochastické neurčitosti využívá přístupů teorie fuzzy náhodných veličin. Využívá hlavně objektivních informací, subjektivní informace jsou rovněž využitelné. Souborně můžeme říci, že existence fuzzy stochastičnosti může být opodstatněna v praktických případech, kdy - rozsah výběrových souborů je malý s absencí dodatečných apriorních informací o statistických vlastnostech měřené veličiny, statistická data mají vlastnost fuzzitivity, tj. mají pochybnou přesnost nebo konečně statistická data byla získána v neurčitých, nedefinovaných nebo nereprodukovaných podmínkách.

Příspěvek obsahuje problematiku teorie pravděpodobnosti fuzzy náhodných veličin stanovení jeich funkčních i číselných fuzzy charakteristik a zavádí definici nejdůležitějších pojmů. Teorie fuzzy náhodných veličiny je základem analýzy vlastností a chování fuzzy stochastických systémů, která bude předmětem zájmu příspěvku následujícího.

Poděkování
Tento příspěvek vznikl s finanční podporou a v rámci řešení projektu GAČR P403/12/1811: Vývoj nekonvenčních modelů manažerského rozhodování v podnikové ekonomice a veřejné ekonomii.

Literatura

[1] BUDÍKOVÁ,M. *Průvodce základními statistickými metodami.* GRADA Publishing, a.s. 2010. ISBN:978-80-247-3243-5
[2] KALA,Z. *Fuzzy Stochastic Analysis of Structural Reliability.* Technické listy 2009. 2.5.2.2-44.CIDEAS Brno. 2009
[3] POKORNÝ,M. *Fuzzy analýza složitých neurčitých soustav I*. Sborník odborných prací Ekonomika-Management-Inovace. MVŠO Olomouc. ISSN
[4] POKORNÝ,M. *Fuzzy analýza složitých neurčitých soustav II*. Sborník odborných prací Ekonoimka-Management-Inovace. MVŠO Olomouc. ISSN
[5] NOVÁK,V. *Základy fuzzy modelování.* BEN Praha, 2000, ISBN 80-7300-009-1
[6] MÖLLER,B.,BEER,M. *Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics.* Springer, 2004, ISBN 3-540-40294-2
[7] MÖLLER,B. *Fuzzy Randomness – A Contribution to Imprecise Probability.* ZAMM – Z Agnew. Match. Mech.84. No.10-14. Str.754-764.WILLEY-VCH. 2004